En probabilités et statistiques, on approfondit le travail mené les années précédentes en l'enrichissant selon deux objectifs principaux :
• Découvrir et exploiter des exemples de lois à densité. On aborde ici le champ des problèmes à données continues. La loi uniforme fournit un cadre simple pour découvrir le concept de loi à densité et les notions afférentes. Le travail se poursuit dans le cadre des lois exponentielle et normale où le lien entre probabilité et aire est consolidé. La loi normale, fréquemment rencontrée dans les autres disciplines, doit être l'occasion d'un travail interdisciplinaire.
• Compléter la problématique de la prise de décision par celle de l'estimation par intervalle de confiance. On s'appuie sur la loi normale et, en mathématiques, on se limite au cadre d'une proportion. Toutefois, la pertinence des méthodes statistiques utilisées dans les disciplines scientifiques et technologiques, en particulier l'estimation d'une moyenne, peut s'observer par simulation.
Dans cette partie, le recours aux représentations graphiques et aux simulations est indispensable

PROGRAMMES	CAPACITES ATTENDUES	COMMENTAIRES
Loi exponentielle.	Calculer une probabilité dans le cadre d'une loi exponentielle.	On s'intéresse à des situations concrètes, par exemple la radioactivité ou la durée de fonctionnement d'un système non soumis à un phénomène d'usure (taux de désintégration ou taux d'avarie constant).
Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle.	Connaître et interpréter l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle.	L'espérance est définie par $\lim\limits_{t \to +\infty} \int_0^t x.f(x)\,\mathrm{d}x$ où f est la fonction de densité d'une loi exponentielle. On peut simuler une loi exponentielle à partir de la loi uniforme sur [0 ; 1].

I. RAPPELS : LOIS A DENSITE

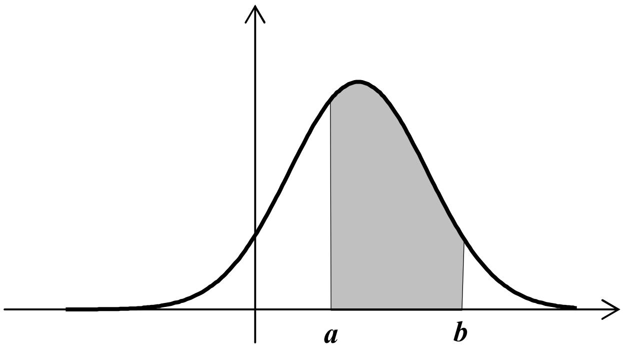
a. Densité de probabilité

On appelle variable aléatoire X toute fonction dont la valeur dépend du hasard (par exemple : la taille d'un individu choisi au hasard dans une foule, la durée de vie d'une batterie électrique, le temps d'attente à un arrêt de bus…)

Une variable aléatoire peut être :

- discrète : elle prend des valeurs isolées et on représente sa loi sous forme d'un tableau (la **loi binomiale** par exemple)

- **continue** : elle prend toutes les valeurs réelles d'un intervalle (donc une infinité de valeurs) et on la représente par une courbe. La fonction représentée par cette courbe est appelée densité de X.



L'aire entre l'axe des abscisses et la courbe vaut 1.

La probabilité que X soit compris entre a et b est égale à la partie du domaine défini par :
- l'axe des abscisses
- la courbe de la densité
- les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

b. Loi uniforme sur [a ; b]

On appelle **loi uniforme sur [a ; b]** notée $\mathscr{U}(a\,;b)$ une variable aléatoire dont la densité est la fonction égale à :

- $\dfrac{1}{b-a}$ sur [a ; b]
- 0 partout ailleurs

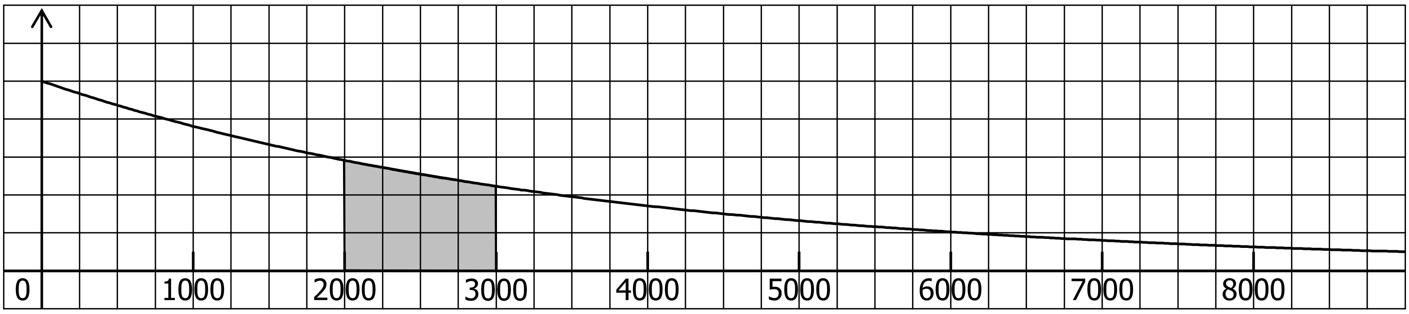
Et pour tous c et d appartenant à [a ; b], la probabilité que X appartienne à [c ; d] est :

$$\mathbf{P}(c \leq \mathbf{X} \leq d) = (d - c) \times \frac{1}{b - a}$$

II. LOI EXPONENTIELLE

a. Exemple

Sur l'emballage d'une ampoule électrique, pour décrire la durée de vie on trouve un graphique de ce type :



La partie hachurée correspond au pourcentage d'ampoules (parmi l'ensemble de la production, donc des millions d'unités) qui dureront entre 2 000 et 3 000 heures, sachant que l'ensemble de l'aire sous la courbe représente 100%, c'est-à-dire 1.

Si on appelle f la fonction dont la courbe est représentée, cette aire sera $\displaystyle\int_{2\,000}^{3\,000} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Et on aura $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

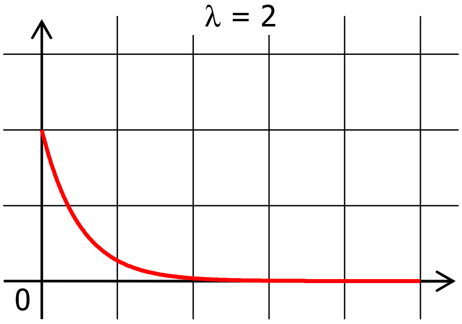
La durée de vie de l'ampoule est une **variable aléatoire du temps**, et sa **densité** est f.

b. Définition

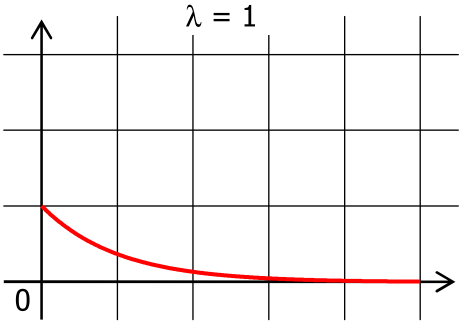
On considère la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par : $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$, où λ est un nombre réel positif.
La variable aléatoire dont f est la densité suit la **loi exponentielle de paramètre λ**.

Exemples :
A la machine, on trace les courbes dans les cas suivants :

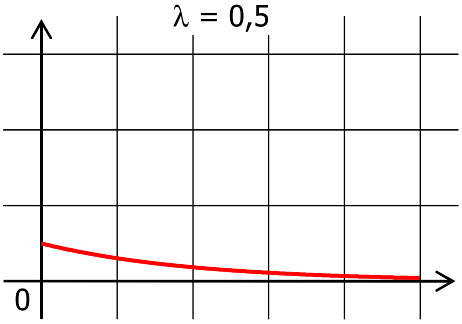
$\lambda = 2$



$\lambda = 1$



$\lambda = 0,5$



Soit a et b deux nombres réels et X une variable qui suit la loi exponentielle de paramètre λ
La probabilité que X soit compris entre a et b est :

$$\mathbf{P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx}$$

Exemple :
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 2.
On veut calculer la probabilité que X prenne une valeur entre 0 et 3.

$$P(0 \leq X \leq 3) = \int_0^3 2\, e^{-2x}\,\mathrm{d}x = [] = \left[\frac{2}{-2}\, e^{-2x}\right]_0^3 = \left[-\, e^{-2x}\right]_0^3 = -e^{-6} + e^{0} = \mathbf{1 - e^{-6}}$$

III. ESPERANCE ET VARIANCE DE LOIS CONTINUES.

a. Définition pour une loi continue

On a vu en 1ère que pour une variable aléatoire discrète :

$$\mathbf{E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i} \qquad\qquad \mathbf{V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(x))^2 p_i}$$

E(X) représente la valeur moyenne de X.

Soit X une variable aléatoire de densité f.

$$\mathbf{E(X)} = \lim_{t \to +\infty} \int_{-t}^{t} x.f(x)\, \mathrm{d}x \qquad\qquad \mathbf{V(X)} = \lim_{t \to +\infty} \int_{-t}^{t} [x - \mathbf{E(X)}]^2.f(x)\, \mathrm{d}x$$

b. Espérance et variance d'une loi uniforme sur [a ; b]

Soit X une variable aléatoire qui suit $\mathcal{U}(a\ ;b)$, donc sa densité est la fonction égale à :

- $\dfrac{1}{b-a}$ sur $[a\ ;\ b]$
- 0 partout ailleurs

$$\mathrm{E(X)} = \int_a^b x.\frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b x.\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\left[\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right] = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \mathbf{\frac{a+b}{2}}$$

donc $\boxed{\mathbf{E(X) = \frac{a+b}{2}}}$

On admettra que :

$$\boxed{\mathbf{V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}}}$$

b. Espérance et variance d'une loi uniforme sur [a ; b]

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ donc sa densité est la fonction égale à $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$

On admettra que $\boxed{\mathbf{E(X) = \frac{1}{\lambda}}}$

Démonstration :

Une primitive de $x.\lambda\, e^{-\lambda x}$ est $F(x) = (-x - 1/\lambda)\, e^{-\lambda x}$

$$\mathrm{E(X)} = \lim_{t \to +\infty} \int_0^t x.\lambda\, e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t \to +\infty} \left[(-x - 1/\lambda)\, e^{-\lambda x}\right]_0^t = [\lim_{t \to +\infty} (-x - 1/\lambda)\, e^{-\lambda x}] - (-0 - 1/\lambda)\, e^{0} = \frac{1}{\lambda}$$