PROGRAMMES	CAPACITES ATTENDUES	COMMENTAIRES
Suites géométriques : - somme des termes consécutifs d'une suite géométrique ; - limite	Reconnaître et justifier la présence d'une suite géométrique dans une situation donnée. Connaître et utiliser la formule donnant $1 + q + \dots + q^n$, où q est un réel différent de 1 Connaître et utiliser $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$ pour q positif.	On peut introduire la notation $\sum\limits_{i=1}^{n} q^i$. On étudie quelques exemples de comportement (q^n) avec q négatif.

I. SUITES GEOMETRIQUES

a. Définition

On appelle suite géométrique toute suite numérique dont chaque terme s'obtient en multipliant par un nombre q constant appelé **raison** de la suite.

Elle est donc définie par récurrence par $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = q.u_n \end{cases}$

Exemple : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2.u_n \end{cases}$

$u_1 = 6$
$u_2 = 12$
$u_3 = 24$
$u_4 = 48$ (…)

b. Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de 1er terme u_0 et de raison q.

Alors pour tout n, on a : $\boxed{\mathbf{u_n = u_0.q^n}}$

Exemple : (u_n) est une suite géométrique de 1er terme $u_0 = 3$ et de raison $r = 2$

$u_1 = 3 \times 2^1 = 6$
$u_2 = 3 \times 2^2 = 12$
$u_3 = 3 \times 2^3 = 24$
$u_4 = 3 \times 2^4 = 48$ (…)

c. Somme des premiers termes d'une suite arithmétique

Propriété :

La somme des $n + 1$ premières puissances (de q^0 à q^n) d'un nombre q (avec $q \neq 1$) est donnée par la formule :

$$\boxed{1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$$

Démonstration :

On sait que : $S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$

En multipliant par q : $qS = q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1}$

En retranchant : $S - qS = 1 - q^{n+1}$

$\Leftrightarrow (1 - q)S = 1 - q^{n+1}$

$\Leftrightarrow \boxed{S = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$ (CQFD)

Propriété :

La somme des $n + 1$ premiers termes (de u_0 à u_n) d'une suite géométrique est :

$$\boxed{S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 . \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$$

ou

$$\mathbf{S = premier\ terme \times \frac{1 - raison^{n+1}}{1 - raison}}$$

Démonstration :

On sait que : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$

$\Leftrightarrow S = u_0 + u_0.q + u_0.q^2 + \ldots + u_0.q^n$

$\Leftrightarrow S = u_0.(1 + q + q^2 + \ldots + q^n)$

$\Leftrightarrow \boxed{S = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$ (CQFD)

II. LIMITE D'UNE SUITE GEOMETRIQUE

Propriété :

Soit q un nombre réel positif.

- Si $0 \leq q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = \lim\limits_{n \to +\infty} 1 = 1$

Conséquence :

Soit (u_n) une suite géométrique de 1er terme u_0 et de raison q.

- Si $0 \leq q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$
- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ si $u_0 > 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ si $u_0 < 0$
- Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$