EXERCICE 6B.1 - METROPOLE GMC 06/2012 (5 POINTS)

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 2z + 2 = 0$.
Donner les solutions sous forme algébrique.

2. On note $w = 1 + i$ et $a = 2 + i$, où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

a. On pose $b = a \times w$. Calculer la forme algébrique du nombre complexe b.

b. On pose $c = \frac{a}{w}$. Démontrer que $c = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} i$

c. Calculer le module de b et le module de c.

3. Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On note A, B et C les points du plan d'affixes respectives a, b et c.

a. Faire une figure, dans laquelle on placera les points A, B, C. L'unité graphique est 2 cm.

b. Calculer la longueur BC.

c. Quelle est la nature du triangle OBC ? Justifier la réponse.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation*.
Démontrer que la droite (OA) est une bissectrice du triangle OBC.

EXERCICE 6B.2 - METROPOLE GMC 09/2012 (5 POINTS)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation suivante :

$$z^2 + 2z\sqrt{3} + 4 = 0$$

2. On considère les points A et B du plan d'affixes respectives :

$$z_A = -\sqrt{3} + i \quad \text{et} \quad z_B = \overline{z_A} = -\sqrt{3} - i$$

a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_A et z_B.

b. Écrire z_A sous la forme $re^{i\theta}$, où r est un réel strictement positif et θ un réel de l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.

c. Placer les points A et B dans le plan muni du repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. (La figure sera réalisée sur la copie.)

d. Démontrer que le triangle OAB est un triangle équilatéral.

3. On considère l'équation d'inconnue z :

$$2z - 4i = iz + 2$$

a. Démontrer que le nombre complexe $2i$ est la seule solution de cette équation.

b. On note C le point d'affixe $2i$. Placer le point C dans le plan muni du repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

c. Démontrer que le quadrilatère OBAC est un losange.

EXERCICE 6B.3 - NOUVELLE-CALEDONIE GMC 09/2012 (5 POINTS)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 4z + 8 = 0$$

2. a. En prenant comme unité graphique 1 cm, représenter dans le plan les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 2 + 2i$, $z_B = 2 - 2i$, et $z_C = 4$.

b. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_A et z_B.

c. Démontrer que le triangle AOB est rectangle isocèle.

d. Démontrer que le quadrilatère OBCA est un carré.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Soit E le milieu du segment [OA] et D le point d'affixe $z_D = i\, z_A$.
Démontrer que le point E est le milieu du segment [CD].