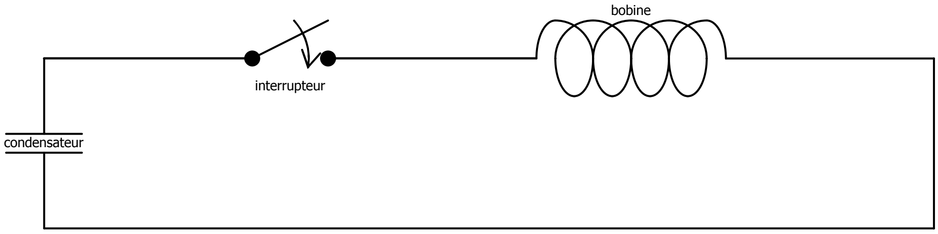
EXERCICE 4B.1 - GMC 2012 (POLYNESIE)

On considère le circuit ci-dessous composé d'une bobine, d'un condensateur et d'un interrupteur.



Le condensateur est initialement chargé.
Au temps $t = 0$, on ferme l'interrupteur. On étudie alors la décharge du condensateur dans la bobine.
On admet qu'à un instant t, la charge q du condensateur, qui est une fonction du temps t, est solution de l'équation différentielle (E) :

$$q'' + 121\times10^6\, q = 0$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E).

2. Déterminer l'expression de la solution particulière q de (E) qui vérifie les conditions :

$$q(0) = 2 \times 10^{-6} \quad \text{et} \quad q'(0) = 0.$$

Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction q ainsi obtenue.

3. Montrer que l'intensité $i(t)$, définie par $i(t) = q'(t)$ où q' désigne la fonction dérivée de la fonction q, est donnée, pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, par :

$$i(t) = -2,2 \times 10^{-2} \sin(11 \times 10^3 t).$$

4. Déterminer la valeur moyenne de la fonction q sur l'intervalle $\left[0 ; \dfrac{\pi \times 10^{-3}}{2\times11}\right]$.

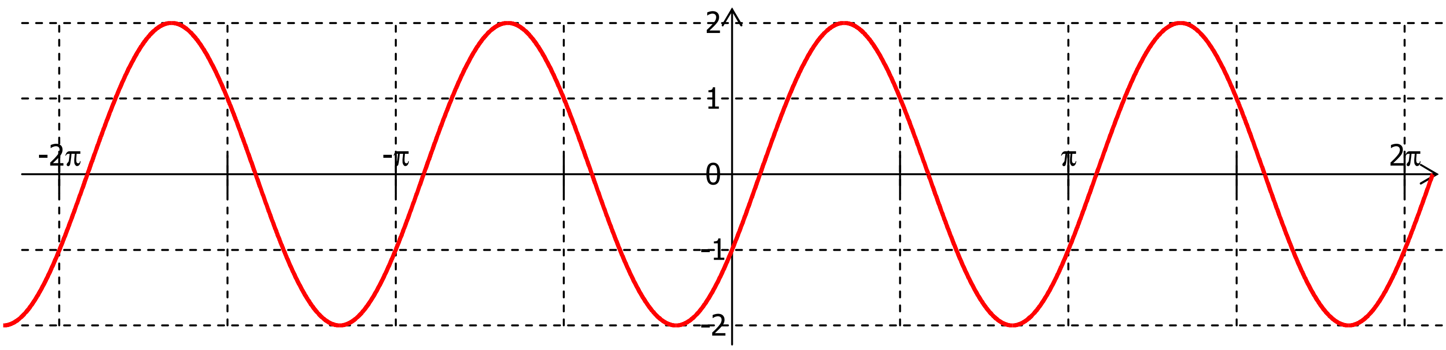
On en donnera la valeur exacte.

On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction f sur l'intervalle $[a ; b]$ est donnée par : $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

EXERCICE 4B.2 - GMA 2012 (ANTILLES)

On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$ par :

$$f(x) = 2 \sin (2x - \pi/6)$$



1. a. Par lecture graphique, donner le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = 2$ dans l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$.

b. Résoudre l'équation $f(x) = 2$ sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

2. On note (E) l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$, où y' est une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et y'' sa fonction dérivée seconde.

a. Résoudre l'équation (E).

b. Déterminer la solution particulière g de (E) qui vérifie $g(0)= -1$ et $g'(0) = 2\sqrt{3}$ où g' désigne la fonction dérivée de g.

c. Comparer $f(x)$ et $g(x)$ pour $x \in [-2\pi ; 2\pi]$. On rappelle que pour tous réels a et b, on a :

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$

Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans la notation.