

EXERCICE 4A.1 - GMA 2007

On considère l'équation différentielle (E) : $4y'' + \pi^2 y = 0$, où y est une fonction numérique deux fois dérivable de la variable réelle x .

1. Résoudre l'équation (E).
2. Déterminer la fonction g , solution de cette équation, dont la courbe représentative dans un repère du plan passe par le point N de coordonnées A $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et qui, en ce point, admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
3. Vérifier que, pour tout nombre réel x , $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$
4. Calculer la valeur moyenne de g sur l'intervalle $[0; 1]$.

EXERCICE 4A.2 - GMA 2007

1. Résoudre l'équation différentielle (E) $y'' + 16y = 0$, y désignant une fonction numérique d'une variable réelle définie et deux fois dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
2. Déterminer la solution f de cette équation différentielle vérifiant $f(0) = \frac{1}{10}$ et $f'(0) = -\frac{2\sqrt{3}}{5}$
3. Démontrer que, pour tout nombre réel x , on a $f(x) = \frac{1}{5} \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$
4. a. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, l'équation $f(x) = \frac{1}{5}$.
b. Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = \frac{1}{5}$ qui appartiennent à l'intervalle $[0; 2\pi[$. Représenter ces solutions sur un cercle trigonométrique.

EXERCICE 4A.3 - GMB 2007

1. Résoudre l'équation différentielle : $9y'' + y = 0$
2. Déterminer la solution f de cette équation différentielle vérifiant les conditions initiales :
$$\begin{cases} f(0) = \sqrt{3} \\ f'(0) = -\frac{1}{3} \end{cases}$$
3. a. Montrer que, pour tout nombre réel x , on peut écrire : $f(x) = 2 \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$
b. Résoudre, dans l'ensemble des nombres réels, l'équation $f(x) = -\sqrt{2}$.
4. Calculer la valeur moyenne m de f sur l'intervalle $[0; \pi]$.

EXERCICE 4A.4 - GMB 2009

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1. Résoudre l'équation différentielle (E) $4y'' + y = 0$, où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et où y'' désigne sa dérivée seconde.
2. a. Le but de cette question est de trouver la solution particulière de (E), appelée f , sachant que la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point A(0 ; 1) et admet en ce point une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$. En déduire les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.
b. Montrer que la solution particulière f de l'équation (E) est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}$.
Soit D le domaine du plan délimité par l'axe des abscisses ; l'axe des ordonnées, la droite d'équation $x = \pi$ et la courbe $\mathcal{C}_f$.
3. Montrer que $[f(x)]^2 = 1 + \sin x$
4. On considère le solide de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe des abscisses. Calculer la valeur exacte, en unité de volume, du volume V de ce solide.

On rappelle que $V = \pi \int_0^\pi [f(x)]^2 dx$