

PROGRAMMES	CAPACITES ATTENDUES	COMMENTAIRES
Primitives d'une fonction sur un intervalle.	• Connaître et utiliser des primitives des fonctions de référence. • Déterminer des primitives de fonctions de la forme $u \cdot u^n$, n entier différent de -1, u'/u, $u'e^u$	Pour les primitives de u'/u, on se limite au cas où u est une fonction strictement positive. ↔ Mouvement uniformément accéléré, retardé. ↔ Point de fonctionnement optimal d'un système lors d'un transfert d'énergie
Définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $[a ; b]$ comme aire sous la courbe. Notation $\int_a^b f(x) dx$ Formule : $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f. Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque. Propriétés de l'intégrale : linéarité, positivité, relation de Chasles.	Pour une fonction monotone positive, mettre en œuvre un algorithme pour déterminer un encadrement d'une intégrale. Calculer une intégrale.	On se limite à une approche intuitive de la continuité et on admet que les fonctions considérées en classe terminale sont continues sur les intervalles où elles sont intégrées. On s'appuie sur la notion intuitive d'aire. Dans le cas d'une fonction f positive et monotone, on sensibilise les élèves au fait que la fonction $\int_a^b f(x) dx$ est dérivable sur $[a,b]$ et a pour fonction dérivée f. On s'approprie le principe de la démonstration par une visualisation à l'aide d'un logiciel. • La $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, valable pour une fonction continue et positive, est étendue au cas d'une fonction continue de signe quelconque.
Calculs d'aires. Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle.	Déterminer l'aire du domaine défini comme l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $a \leq x \leq b$ et $f(x) \leq y \leq g(x)$, f et g étant deux fonctions.	On étudie en particulier le cas où g est la fonction nulle. Il est intéressant de traiter des cas de fonctions changeant de signe. Cette notion est introduite et travaillée en s'appuyant sur des situations issues des disciplines technologiques et des sciences physiques. ↔ Valeur moyenne, valeur efficace dans un transfert énergétique.

I. PRIMITIVES D'UNE FONCTION

a. Définition :

On dit que F est **une** primitive de f sur l'intervalle I si et seulement si pour tout x on a $F'(x) = f(x)$

Exemple :

Soit $f(x) = \frac{-12}{(3x-2)^2}$ et $F(x) = \frac{4}{3x-2}$. Montrer que F est une primitive de f .

→ Cela revient à montrer que f est la dérivée de F

$$\rightarrow F'(x) = \frac{-u'}{u^2} = 4 \times \frac{-3}{(3x-2)^2} = \frac{-12}{(3x-2)^2} = f(x)$$

b. Propriétés :

• Si F est une primitive de f sur l'intervalle I , alors pour toute constante c , la fonction $F + c$ est une autre primitive de f .

• Si F et G sont deux primitives de f sur l'intervalle I , $G = F + c$.

Exemple :

Quand on dérive la fonction $F(x) = x^2$, on obtient la fonction $f(x) = 2x$.

Quand on dérive la fonction $G(x) = x^2 + 1$, on obtient la fonction $g(x) = 2x = f(x)$.

Quand on dérive la fonction $H(x) = x^2 - 3$, on obtient la fonction $h(x) = 2x = f(x)$.

Donc F , G et H sont **des** primitives de $f(x) = 2x$.

c. Primitives des fonctions usuelles :

Voici le tableau des primitives des fonctions usuelles :

$f(x)$	$F(x)$
k (constante)	$kx + c$
x^n	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$
$\frac{1}{x^n} \ (x \neq 1)$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$
e^x	$e^x + c$

Exemples :

Si $f(x) = x^5$ alors $F(x) = \frac{x^6}{6} + c$

Si $f(x) = \frac{1}{x^4}$ alors $F(x) = \frac{-1}{3x^3} + c$

II. OPERATIONS SUR LES PRIMITIVES

$f(x)$	$F(x)$
$u + v$	$U + V$
$k \cdot u$	$k \cdot U$
$u' \cdot u^n$	$\frac{1}{n+1} \cdot u^{n+1} + c$
$\frac{u'}{u}$ (avec $u > 0$)	$\ln u + c$
$u' \cdot e^u$	$e^u + c$
En particulier : e^{ax}	$\frac{1}{a} e^{ax} + c$

III. INTEGRALE D'UNE FONCTION DERIVABLE SUR UN INTERVALLE**Définition :**

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I et un couple $(a ; b)$ de points de I

On appelle intégrale de f entre a et b (ou « de a à b ») le nombre $F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f , est indépendant du choix de F ; on le note $\int_a^b f(t)dt$

Remarques :

- Une intégrale est un nombre réel.

- Pour calculer une intégrale, il faut nécessairement déterminer une primitive de f .
- Quelle que soit la primitive de f choisie, l'intégrale sera la même.

Exemple :

Déterminer la valeur exacte de $\int_1^2 x^2 - 2 \, dt$

$$\int_1^2 x^2 - 2 \, dt = \left[\frac{x^3}{3} - 2x \right]_1^2 = \left[\frac{2^3}{3} - 2 \times 2 \right] - \left[\frac{1^3}{3} - 2 \times 1 \right] = \frac{8}{3} - 4 - \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3} - 2 = \frac{7}{3} - \frac{6}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

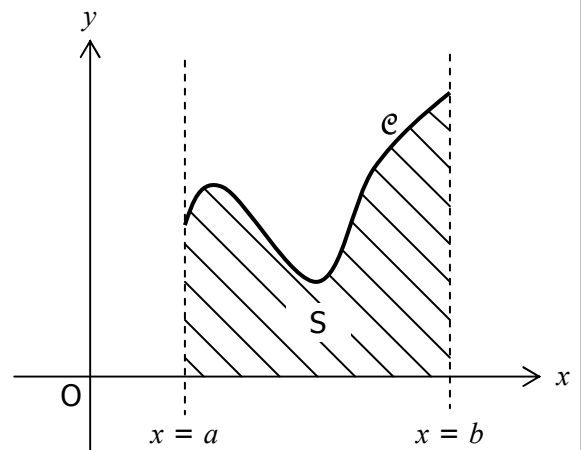
IV. CALCULS D'AIRES**a. Calculs d'aires**

Soit f une fonction dérivable sur $[a ; b]$, et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

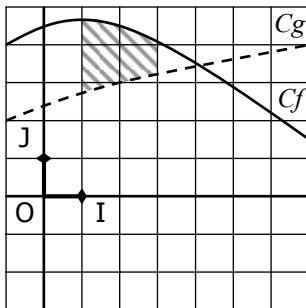
On considère la surface S définie par :

- l'axe des abscisses
- la droite d'équation $x = a$
- la droite d'équation $x = b$
- la courbe $\mathcal{C}$

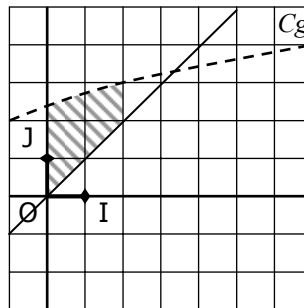
Alors l'aire de S vaut $\int_a^b f(x) \, dx$ si $\mathcal{C}$ est au dessus de l'axe des abscisses, et $-\int_a^b f(x) \, dx$ elle est en dessous.



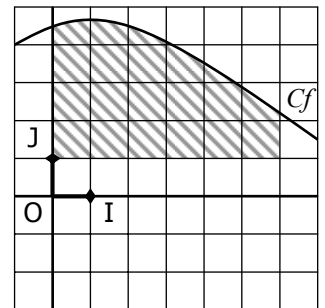
Attention, l'aire donnée par l'intégrale est exprimée en unité d'aire du plan, qui correspond à la surface d'un rectangle dont les côtés ont la longueur des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Exemples et variantes :

$$A = \int_I^3 f(x) - g(x) \, dx$$



$$A = \int_0^2 g(x) - x \, dx$$



$$A = \int_0^6 g(x) - 1 \, dx$$

V. PROPRIETES DE L'INTEGRALE

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I et un a, b, c des points de I

a. Relation de Chasles :

$$\int_a^b f(t) \, dt + \int_b^c f(t) \, dt = \int_a^c f(t) \, dt$$

Exemple :

b. Linéarité :

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt + \beta \int_a^b g(t) dt$$

Exemple :

c. Positivité :

$$\text{Si } a \leq b \text{ et si } f \geq 0 \text{ alors } \int_a^b f(t) dt \geq 0$$

Exemple :

d. Inégalité de la moyenne :

$$\text{Si } m \leq f \leq M \text{ et } a \leq b, \text{ alors } m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

VI. VALEUR MOYENNE D'UNE FONCTION SUR UN INTERVALLE

Soit f une fonction dérivable sur $[a ; b]$. La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a ; b]$ est :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$