**EXERCICE 4A.1**

Soit la fonction définie sur ]0 ; +∞[ par :

$$f(x) = x \ln x$$

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

**1.** Calculer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.

**2.** a. Calculer la fonction $f'$, dérivée de $f$.
**b.** Etudier le signe de $f$.
**c.** En déduire le tableau de variation de $f$.

**2.** Calculer l'équation de la droite (Δ), tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.

**3.** Dans le repère, tracer $\mathcal{C}$ et (Δ).

**EXERCICE 4A.2**

Soit la fonction définie sur ]2 ; +∞[ par :

$$f(x) = \ln \frac{x-2}{x+2}$$

**1. a.** Calculer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.
**b.** En déduire que $\mathcal{C}$, la courbe représentative de $f$, admet deux asymptotes dont on précisera les équations.

**2. a.** Montrer que la fonction dérivée de $f$ peut s'écrire :

$$f'(x) = \frac{4}{(x-2)(x+2)}$$

**b.** Etudier le signe de $f'$.
**c.** En déduire le sens de variation de $f$.

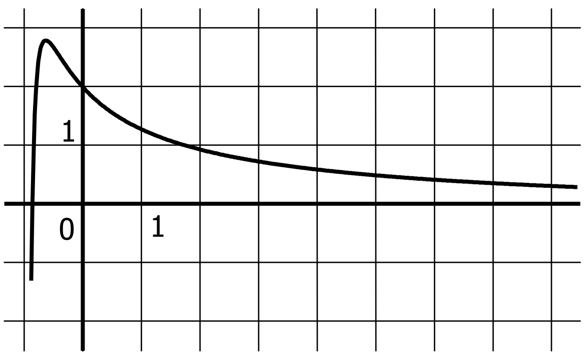
**3.** Dans un repère orthonormé (unité : 1 cm), tracer $\mathcal{C}$ ainsi que les deux asumptotes.

**EXERCICE 4A.3 - BTS 2005**

Soit $f$ la fonction définie sur ]-1 ; +∞[ par :

$$f(x) = \frac{2 + \ln(1+x)}{1+x}$$

Sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormal est donnée ci-dessous :




**1.** On admet que :

$$\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$ ?

**2. a.** Démontrer que pour tout $x$ de ]-1 ; +∞[,

$$f'(x) = \frac{-1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

**b.** Résoudre dans l'inéquation $-1 - \ln(1+x) \geq 0$.
En déduire le signe de $f'(x)$ lorsque $x$ varie dans ]-1 ; +∞[.
**c.** Etablir le tableau de variation de $f$.

**EXERCICE 4A.4 - BAC 2009**

**Partie A**

Soit la fonction définie sur ]0 ; +∞[ par :

$$g(x) = 1 - \ln x + 2x^2$$

**1.** Montrer que :

$$g'(x) = \frac{(2x+1)(2x-1)}{x}$$

**2. a.** Etudier le signe de $g'(x)$ sur ]0 ; +∞[.
**b.** Calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$
**c.** Dresser le tableau de variation de g sur ]0 ; +∞[ (sans les limites).

**3.** En déduire que pour tout $x$ de ]0 ; +∞[, $g(x)$ est strictement positif.

**Partie B**

Soit la fonction définie sur ]0 ; +∞[ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + 2x - 3$$

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe dans le repère orthogonal (O, I, J) (unités : 2 cm en abscisses, 1 cm en ordonnées).

**1.** Etudier la limite de $f$ en 0. En déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.

**2. a.** Montrer que pour tout $x$ strictement positif :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

**b.** En déduire le signe de $f'(x)$ sur ]0 ; +∞[.
**c.** Dresser le tableau de variation de $f$.

**3.** Soit A et B les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives $e$ et $\sqrt{e}$.
**a.** Donne les valeurs arrondies au centième des coordonnées de A et B.
**b.** En déduire que $f$ est positive sur $[\sqrt{e} ; e]$.

**4.** Tracer la droite *(Δ)*, la courbe $\mathcal{C}$ et placer A et B.

**5.** Démontrer qu'au point A, la courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à *(Δ)*.