

CONTENUS	CAPACITES ATTENDUES	COMMENTAIRES
Fonction logarithme népérien. Relation fonctionnelle. Nombre e.	Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture. Connaître les variations, les limites et la représentation graphique de la fonction logarithme népérien. Résoudre une inéquation d'inconnue n entier naturel, de la forme $q^n \geq a$ ou $q^n \leq a$ avec q et a deux réels strictement positifs. Calculer des dérivées des fonctions de la forme : $x \mapsto \ln u(x)$	En s'appuyant sur des situations technologiques ou historiques, on justifie la pertinence de la recherche d'une solution à l'équation fonctionnelle suivante, notée (E) : pour tous réels a et b strictement positifs, $f(ab) = f(a) + f(b)$ On s'intéresse aux solutions de l'équation (E) dérivables sur $]0 ; +\infty[$ (existence admise). On montre que la fonction dérivée d'une telle solution est de la forme $x \mapsto \frac{\alpha}{x}$, où α est un nombre réel. La fonction logarithme népérien est alors présentée comme la seule solution de l'équation (E) dérivable sur $]0 ; +\infty[$ dont la fonction dérivée est $x \mapsto \frac{1}{x}$.
Fonction logarithme en base dix ou en base deux, selon les besoins.		On s'appuie sur des exemples issus des autres disciplines pour introduire ces fonctions.

I. FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

a. Définition :

On considère la fonction f par $f(x) = \frac{1}{x}$

On appelle fonction *logarithme népérien* (et on note « $\ln$ ») la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ telle que :

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad f(1) = 0$$

Cette fonction $f(x)$ sera noté $\ln x$

b. Conséquences immédiates :

- $\ln 1 = 0$
- La fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Exemples :

❶ Déterminer la dérivée de $f(x) = 3 \ln x - x$

$$\rightarrow f'(x) = 3 \times \frac{1}{x} - 1 = \frac{3}{x} - 1$$

❷ Déterminer une primitive de $g(x) = \frac{2+3x}{x} = \frac{2}{x} + 3 = 2 \times \frac{1}{x} + 3$

$$\rightarrow G(x) = 2 \ln x + 3x + c$$

c. Dérivée de $u(x)$

On rappelle la formule $(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$ ou c'est-à-dire $v[u(x)]' = u'(x) \times v'[u(x)]$

En particulier, si $v(x) = \ln(x)$ on a :

$$(\ln u)' = u' \times \frac{1}{u} = \frac{u'}{u}$$

Exemple :

Déterminer la dérivée de $f(x) = \ln(2x^3 + x)$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{6x^2 + 1}{2x^3 + x}$$

II. RELATIONS FONCTIONNELLES

a. Relations :

Pour tous réels a et b strictement positifs, on a les égalités :

$$\textcircled{1} \ln(ab) = \ln a + \ln b \quad \textcircled{2} \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \quad \textcircled{3} \ln \frac{1}{a} = -\ln a \quad \textcircled{4} \ln(a^n) = n \ln a$$

Exemples :

① $\ln 6 = \ln (2 \times 3) = \ln 2 + \ln 3$

② $\ln \frac{2}{3} = \ln 2 - \ln 3$

③ $\ln \frac{1}{2} = -\ln 2$

④ $\ln 32 = \ln 2^5 = 5 \ln 2$

Attention : les expressions suivantes ne peuvent pas être transformées !

$\ln (a + b) = \text{idem}$

$\ln (a - b) = \text{idem}$

$\ln a \times \ln b = \text{idem}$

$\frac{\ln a}{\ln b} = \text{idem}$

b. Le nombre eIl existe un nombre, noté e, tel que $\ln e = 1$ Ce nombre a pour valeur approchée : $e \approx 2,718\ 281\dots$ **Conséquence :**Pour tout x on a : $\ln e^x = x \ln e = x$

$\ln e = 1$

$\ln e^2 = 2$

$\ln e^3 = 3$

...

c. Applications aux équations/inéquationsPour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $\frac{1}{x} > 0$ donc la fonction ln est strictement croissante et donc :**Théorème :****Pour tous réels a et b strictement positifs :**

- $a < b \Leftrightarrow \ln a < \ln b$
- $a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b$
- $a > b \Leftrightarrow \ln a > \ln b$

Exemples :

$$\begin{aligned}
 \text{1. On veut résoudre l'équation } \ln (2x) &= \ln 5 & \Leftrightarrow & \ln (2x) = \ln (e^5) \\
 & & \Leftrightarrow & 2x = e^5 \\
 & & \Leftrightarrow & \boxed{x = \frac{e^5}{2}}
 \end{aligned}$$

2. On considère la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 1,5. On a donc pour tout n, $u_n = 1,5^n$. On veut déterminer le rang à partir duquel on a $u_n > 1000$. Jusqu'ici, on utilisait un algorithme, ce qui est parfois long. Mais désormais : $u_n > 1000 \Leftrightarrow 1,5^n > 1000$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \ln(1,5^n) > \ln 1000 \\
 &\Leftrightarrow n \ln 1,5 > \ln 1000 \\
 &\Leftrightarrow n > \frac{\ln 1000}{\ln 1,5} \approx 17,036
 \end{aligned}$$

Donc on prendra $n = 18$.**III. ETUDE DE LA FONCTION LOGARITHME NEPERIEN****a. Ensemble de définition**La fonction $\ln x$ est définie sur $]0 ; +\infty[$

b. Sens de variation

On sait que $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Or pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, $\frac{1}{x} > 0$

donc la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$

c. Limites

On va essayer de déterminer les limites aux bornes de l'intervalle d'étude, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x$.

→ en 0 (expérimentalement)

x	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
$\ln x (\approx)$	0	-2,30	-4,61	-6,91	-9,21	-11,51	-13,81

Chaque fois que x est divisé par 10, $\ln x$ diminue d'environ 2,30 (c'est-à-dire $\ln 10$). Il semble donc qu'on puisse rendre $\ln x$ aussi petit qu'on veut en prenant x suffisamment proche de 0 et donc on admettra le résultat suivant :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

→ en $+\infty$ (expérimentalement)

x	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$\ln x (\approx)$	0	2,30	4,61	6,91	9,21	11,51	13,81

Chaque fois que x est multiplié par 10, $\ln x$ augmente d'environ 2,30. Il semble donc qu'on puisse rendre $\ln x$ aussi grand qu'on veut en prenant x suffisamment grand et donc on admettra le résultat suivant :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

d. Valeurs remarquables

- Par définition, on sait que :

$$\ln 1 = 0$$

- D'autre, puisque la fonction $\ln$ est dérivable et strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$, elle prend toutes les valeurs comprises entre $-\infty$ et $+\infty$. Il existe donc un unique réel noté e tel que, en particulier :

$$\ln e = 1$$

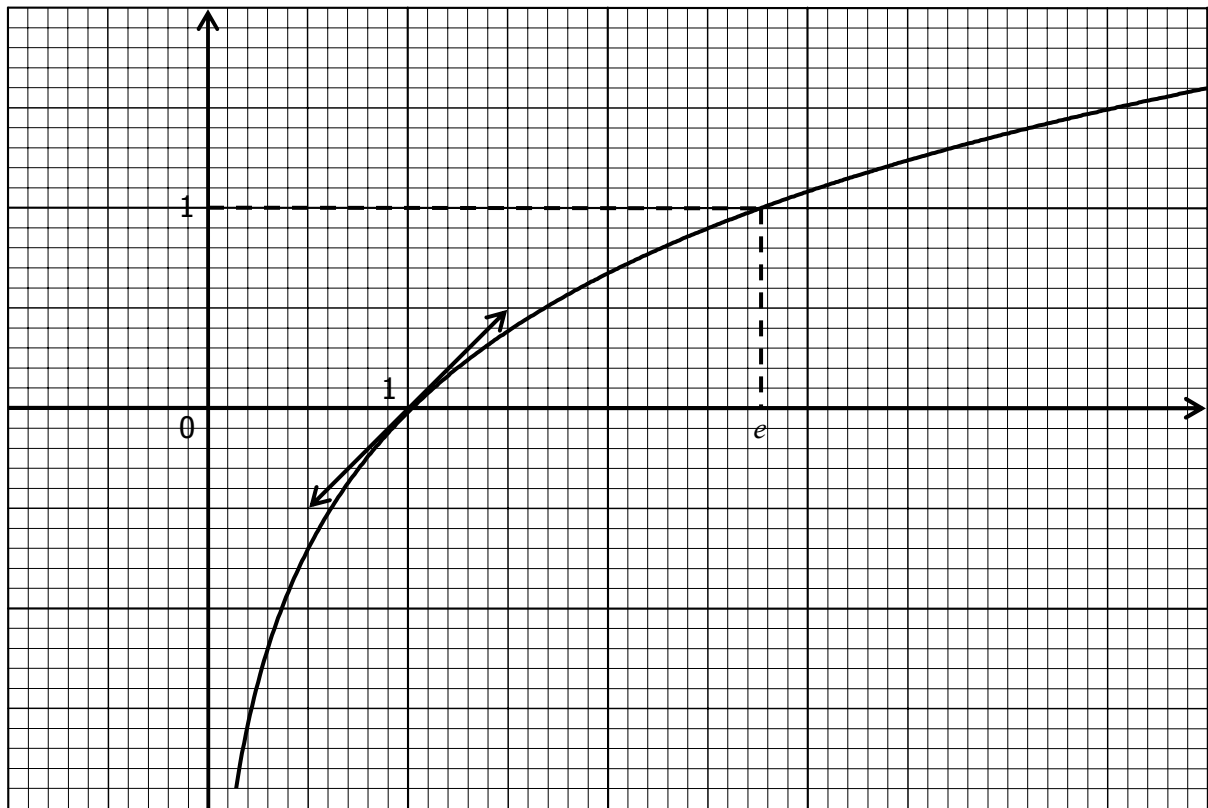
e. Tableau de variation

On résume toutes les informations précédentes dans un tableau :

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	0	1	

f. Courbe représentative

Dans un repère orthonormé, on représente la courbe de f ainsi que sa tangente en 0.

**IV. CROISSANCE COMPAREE A L'INFINI**

On admettra les limites suivantes, pour tout n entier strictement positif :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$$

V. LOGARITHME DE BASE DEUX OU DIX

Le logarithme népérien est un **logarithme de base e** .

En effet, on a :

$$\ln e = 1$$

$$\ln e^2 = 2$$

$$\ln e^3 = 3$$

...

En physique, on est souvent amené à utiliser le logarithme décimal (ou logarithme de base 10) noté $\log_{10} x$ ou plus simplement $\log x$ et qui pour tout x est égal à $\frac{\ln x}{\ln 10}$.

On a alors :

$$\log 10 = 1$$

$$\log 100 = \log 10^2 = 2$$

$$\log 1000 = \log 10^3 = 3$$

...

Ce log est utilisé lorsqu'on est amené à mesurer des valeurs ou des ordres de grandeur très différents comme par exemple :

- Les sons (le Bel et le déciBel/dB)

- L'échelle de Richter
- L'acidité d'une solution (en chimie, le pH)

Exemple avec le dB :

On mesure un premier son qui a une puissance P.

On a donc : $(\log P) B$ donc $(10 \log P) \text{ dB}$

On mesure un autre son 10 fois plus puissant.

On a donc : $\log 10P = \log 10 + \log P = (1 + \log P) B = 10 + (10 \log P) \text{ dB}$

Et oui, il n'y a que 10 dB d'écart entre les deux sons !

Ainsi :

- Marteau piqueur (120 dB) et Avion a décollage(130 dB). L'avion fait un bruit 10 fois plus puissant que le marteau piqueur.
- Aspirateur (70 dB) et Moto (90 dB). La moto fait un bruit 100 fois plus puissant que l'aspirateur.

En physique, on est souvent amené à utiliser le logarithme deux (ou logarithme binaire) noté $\log_2 x$ et qui pour tout x est égal à $\frac{\ln x}{\ln 2}$.

On a alors :

$$\log 2 = 1$$

$$\log 4 = \log 2^2 = 2$$

$$\log 8 = \log 2^3 = 3$$

...