On rappelle les 3 propriétés :

- **Si pour x assez grand, $f(x) \geq u(x)$, et si $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$**
- **Si pour x assez grand, $|f(x) - L| \leq u(x)$, et si $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.**
- **Si pour x assez grand, $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$, et si $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = L$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.**

EXERCICE 4A.1

Ecrire la conclusion de chaque proposition… si l'on peut conclure.

a. Puisque pour tout x on a $f(x) \geq x^2 + 3$ et puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 3 = +\infty$ alors :

b. Puisque pour tout x on a $|f(x) - 3| \leq \dfrac{1}{x}$ et puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ alors :

c. Puisque pour tout x on a $\dfrac{1}{x+2} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x+1}$ et puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$ alors :

d. Puisque pour tout x on a $f(x) \geq x^2 + 1$ et puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 + 1 = +\infty$ alors :

e. Puisque pour tout x on a $f(x) \geq x^3 + 4$ et puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 + 4 = -\infty$ alors :

f. Puisque pour tout x on a $|f(x) + 3| \leq \dfrac{1}{1+x}$ et puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1+x} = 0$ alors :

g. Puisque pour tout x on a $f(x) \leq x^3$ et puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ alors :

h. Puisque pour tout x on a $f(x) \leq x^2 + 2$ et puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 2 = +\infty$ alors :

i. Puisque pour tout x on a $\dfrac{2x+1}{x+3} \leq f(x) \leq \dfrac{2x+3}{x+1}$ et puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{x+3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+3}{x+1} = 2$ alors :

j. Puisque pour tout x on a $|f(x) - 2| \leq \dfrac{x+1}{x}$ et puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$ alors :

EXERCICE 4A.2

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$ par : $f(x) = x^2 + \cos x$

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ en utilisant une minoration de f.

EXERCICE 4A.3

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\ ;0]$ par : $f(x) = x(2 + \sin x)$

Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ en utilisant une majoration de f.

EXERCICE 4A.4

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par : $f(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

a. Montrer que pour tout x de $]0\ ;+\infty[$ on a : $-x \leq f(x) \leq x$

b. En déduire $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

EXERCICE 4A.5

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

On admet que pour tout x de $]0\ ;+\infty[$ on a : $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \mathrm{f}(x) \leq x$

En déduire $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.