Pour l'étude des fonctions, on s'appuiera conjointement sur les interprétations *graphiques* (y=f(x)), *cinématiques* (x=f(t)) et *électriques* (signaux relatifs à l'évolution d'une intensité, d'une différence de potentiel...).

Le programme se place dans le cadre des *fonctions définies sur un intervalle* et porte, pour l'essentiel, sur le cas des fonctions possédant dans cet intervalle des dérivées jusqu'à un ordre suffisant. Certaines situations (signaux...) mettent enjeu des fonctions définies par morceaux ; la mise en place d'un cadre théorique est exclue : l'étude sera menée intervalle par intervalle. L'intervalle de définition sera indiqué. ***Toute recherche a priori d'ensembles de définition est exclue.***

Quelques énoncés sur les *limites* figurent au programme. Ils ne constituent pas un objectif en soi, mais visent seulement à faciliter, le cas échéant, l'étude du comportement aux bornes de l'intervalle et notamment du comportement asymptotique au ; on évitera de multiplier les exemples posés *a priori* et toutes les indications nécessaires doivent être données.

Pour la notion de limite, le point de vue adopté reste le même qu'en première ; les définitions (ε,α) ou (ε,A) sont hors programme. ***La continuité en un point et la continuité sur un intervalle sont hors programme.***

PROGRAMMES	COMMENTAIRES
Dérivation d'une fonction composée. Application à la dérivation de fonctions de la forme u^n ($n\in\mathbb{N}$), ln u, exp u, u^α ($\alpha\in\mathbb{N}$), Dérivées successives ; notation f', f''...	La démonstration de cette règle n'est pas au programme. En liaison avec les sciences physiques, on donnera aussi les notations $\frac{df}{dx}$, $\frac{d^2f}{dx^2}$. La notion de différentielle est hors programme, ainsi que toute notion concernant la concavité ou les points d'inflexion.
Travaux Pratiques Programmation des valeurs d'une fonction d'une variable. Programmation des valeurs d'une fonction d'une variable. Etude du sens de variation d'une fonction, recherche de son signe, recherche des extremums. Lecture de propriétés d'une fonction à partir de sa représentation graphique. Etude d'équations $f(x)=\lambda$ ou d'inéquations $f(x)\leq\lambda$. Exemples de recherche de solutions approchées d'une équation numérique.	 Dans l'ensemble des travaux pratiques, on exploitera largement des situations issues de la géométrie, des sciences physiques et de la technologie. Dans l'ensemble des travaux pratiques, on exploitera largement des situations issues de la géométrie, des sciences physiques et de la technologie. Etant donné une fonction f strictement monotone sur I et un élément α de I tel que f(α)=0, les élèves doivent savoir comparer α à un élément donné β de I en utilisant le signe de f(β). On pourra, sur des exemples, explorer et itérer quelques méthodes (dichotomie, tangente, interpolation linéaire...) mais aucune connaissance sur ces méthodes n'est exigible des élèves.

I. DERIVATION EN UN POINT

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0

On dit que f est **dérivable** en x_0 si et seulement si il existe un nombre a et un fonction φ tels que :

$$\boxed{f(x_0+h)=f(x_0)+ah+h\varphi(h)} \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varphi(h)=0$$

a est appelé le **nombre dérivé** de f en x_0, et on le note $\mathbf{f'(x_0)}$.

Exemple : On veut calculer le nombre dérivé de la fonction f : $x\longmapsto x^3$ quand $x_0=2$.

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(2+h)\\ &= (2+h)^3\\ &= (2+h)(2+h)^2\\ &= (2+h)(4+4h+h^2)\\ &= 8+8h+2h^2+4h+4h^2+h^3\\ &= 8+12h+6h^2+h^3 \end{aligned}$$

$$\boxed{f(2+h)=\mathbf{8}+\mathbf{12}h+h(6h+h^2)} \text{ avec } \lim_{h\to 0}6h+h^2=0$$

$$\boxed{f(2)=\mathbf{8}} \qquad \boxed{f'(2)=\mathbf{12}}$$

II. FONCTION DERIVEE

a. Définition

Soit f dérivable sur un intervalle I. La fonction qui, à tout x de I, associe son nombre dérivé, est appelée **fonction dérivée** de f et est notée f'.

b. Notation différentielle

Si f est une fonction de la variable x (qui dépend de x), on peut aussi noter sa dérivée $\frac{df}{dx}$ (notation particulièrement utilisée en physique).

$$\boxed{f' = \frac{df}{dx}} \quad \text{ou} \quad \boxed{f'(x) = \frac{df(x)}{dx}}$$

c. Fonctions dérivées des fonctions usuelles

De la même façon, on détermine les fonctions dérivées suivantes :

fonction :	définie sur :	dérivable sur :	fonction dérivée :
$f(x) = k$ (constante)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$

c. Opérations sur les fonctions dérivées

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle I. On admettra les résultats suivants :

	f	f'
1. Somme	$u + v$	$u' + v'$
2. Produit par un réel constant	$k.u$	$k.u'$
3. Produit de deux fonctions	$u.v$	$u'.v + u.v'$
4. Carré d'une fonction	u^2	$2u'.u$
5. Inverse	$\frac{1}{u}$ avec $u(x) \neq 0$ sur I	$\frac{-u'}{u^2}$
6. Quotient	$\frac{u}{v}$ avec $v(x) \neq 0$ sur I	$\frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

d. Exemples

1. Somme

→ Soit $f(x) = x^2 + x^5$. Alors $f'(x) = 2x + 5x^4$.

2. Produit par un réel constant

→ Soit $f(x) = 2x^3$. Alors $f'(x) = 2(3x^2) = 6x^2$.
→ Soit $g(x) = 5x$. Alors $f'(x) = 5(1) = 5$.

Conséquence de **1.** et **2.** : Tout polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
→ $P(x) = 6x^3 + 3x^2 - 7x + 4$. Alors $P'(x) = 6(3x^2) + 3(2x) - 7(1) + 0 = 18x^2 + 6x - 7$

3. Produit de deux fonctions

→ Soit $f(x) = x\sqrt{x}$. Alors $f'(x) = 1.\sqrt{x} + x.\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

4. Carré d'une fonction

→ Soit $f(x) = (5x + 3)^2$. Alors $f'(x) = 2 \times 5 \times (5x + 3) = 10(5x + 3)$

5. Inverse

→ Soit $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3}$. Alors $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 3)^2}$

6. Quotient

→ Soit $f(x) = \frac{x^2 + 3}{3x - 4}$. Alors $f'(x) = \frac{2x(3x - 4) - 3(x^2 + 3)}{(3x - 4)^2} = \frac{6x^2 - 8x - 3x^2 - 9}{(3x - 4)^2} = \frac{3x^2 - 8x - 9}{(3x - 4)^2}$

e. Composée avec une fonction

Théorème :

Soit une fonction g obtenue en composant une fonction f et une fonction u, donc $f(x) = v[u(x)]$.
Alors :

$$\boxed{f'(x) = u'(x) \times v'[u(x)]}$$

Exemples :

→ $f(x) = \sqrt{5x - 3}$

$u(x) = 5x - 3$ et $v(x) = \sqrt{x}$ donc $u'(x) = 5$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

donc $f(x) = 5 \times \frac{1}{2\sqrt{5x - 3}} = \frac{5}{2\sqrt{5x - 3}}$

→ $f(x) = (x^2 + 3x + 2)^3$

$u(x) = x^2 + 3x + 2$ et $v(x) = x^3$ donc $u'(x) = 2x + 3$ et $v'(x) = 3x^2$

donc $f(x) = 3(2x + 3)(x^2 + 3x + 2)^2$

→ $f(x) = \cos \frac{1}{x}$

$u(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \cos x$ donc $u'(x) = \frac{-1}{x^2}$ et $v'(x) = -\sin x$

donc $f(x) = \frac{-1}{x^2} \times - \sin \frac{1}{x} = \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2}$

III. DERIVEES SUCCESSIVES D'UNE FONCTION

a. Définition

Soit f dérivable sur un intervalle I, et f′ sa dérivée.

Si f′ est également dérivable sur I, on dit que f est **deux fois dérivable** sur I et la fonction f″, dérivée de f′, est appelée **dérivée seconde** de f.

De même, on pourrait définir ainsi la dérivée $3^{\text{ème}}$ de f notée $f^{(3)}$, ou la dérivée n-ième de f notée $f^{(3)}$

Exemple :

Soit $f(x) = 2x^4 + 5x^3 - 3x^2 + x - 7$

alors $f'(x) = 8x^3 + 15x^2 - 6x + 1$

et $f''(x) = 24x^2 + 30x - 6$

et encore $f^{(3)}(x) = 48x + 30$

b. Notation différentielle

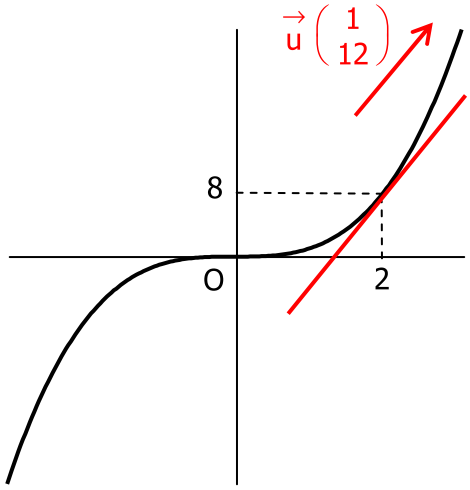
La dérivée seconde de f peut aussi se noter :

$$\boxed{f'' = \frac{d^2f}{dx^2}}$$

IV. TANGENTE A UNE COURBE

Soit f une fonction dérivable en x_0.

On appelle **tangente à la courbe représentative de f au point x_0** la droite passant par le point A(x_0 ; f(x_0)) et de coefficient directeur f'(x_0).



Exemple :

La fonction f : $x \longmapsto x^3$ admet au point (2 ; 8) une tangente dont le coefficient directeur est 12.

Théorème :

Soit f une fonction dérivable en x_0.

La courbe représentative de f admet au point A(x_0 ; f(x_0)) une tangente dont l'équation réduite est :

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

Exemple :

La tangente à f : $x \longmapsto x^3$ admet au point A(2 ; 8) admet pour équation :

$$y = 12(x - 2) + 8 \quad \Leftrightarrow \quad y = 12x - 24 + 8 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{y = 12x - 16}$$

V. POSITON RELATIVE DE DEUX COURBES

On considère deux fonctions f et g, ainsi que leurs courbes respectives C_f et C_g

- Si pour tout x appartenant à un intervalle I, on a ***f(x)* > *g(x)*** alors C_f est située **au dessus** de C_g sur I
- Si pour tout x appartenant à un intervalle I, on a ***f(x)* < *g(x)*** alors C_f est située **au dessous** de C_g sur I

En particulier, si l'on veut comparer la position de la courbe d'une fonction et de sa tangente d'équation $y = ax + b$ en un point x_0, on étudie le signe de la différence entre « $f(x) - ax + b$ » pour des valeurs proches de x_0, en dissociant les cas où $x > x_0$ et $x < x_0$.

Exemple :

On veut connaitre la position relative des courbes des fonctions définies sur ℝ par f(x) = x^2 et g(x) = x^3

→ g(x) – f(x) = $x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$

Dans la mesure où pour tout x on a $x^2 > 0$, le signe de g(x) – f(x) ne dépend que de (x – 1)

- Sur [1 ; +∞[, g(x) – f(x) est donc positif, la courbe de g(x) = x^3 est au dessus.
- Sur]-∞ ; 1], g(x) – f(x) est donc négatif, la courbe de g(x) = x^3 est au dessous.

VI. SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si $f'(x)$ est **strictement positive** pour tout x de I, alors f est **strictement croissante** sur I
Si $f'(x)$ est **strictement négative** pour tout x de I, alors f est **strictement décroissante** sur I

Exemple :

Soit $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 6$.
→ On calcule la fonction dérivée : $f'(x) = 2(3x^2) + 3(2x) - 12 = 6x^2 + 6x - 12$
→ On étudie le signe de $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$
$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 6 \times (-12) = 36 + 288 = 324 = 18^2$
Les deux solutions sont $x_1 = \dfrac{-6 + 18}{2 \times 6} = \dfrac{12}{12} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-6 - 18}{2 \times 6} = \dfrac{-24}{12} = -2$
Et le signe de $f'(x)$ est donc donné par :

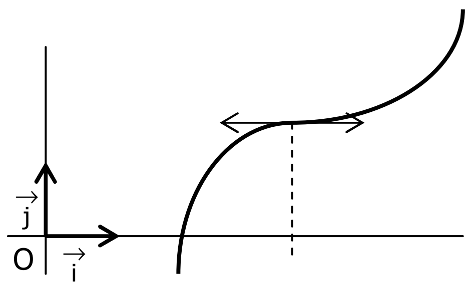
x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	26	↘	-1	↗	

VII. EXTREMUM

Théorème :
Si f est dérivable sur I et admet un extremum local (maximum ou minimum) en un point x_0 distinct des extrémités de I, alors $f'(x_0) = 0$

Exemple :
Soit $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 6$.
On constate sur le tableau de variation de f qu'elle admet un maximum local en -2 et un minimum local en 1.
Et on constate que :
$f'(-2) = 6 \times (-2)^2 + 6 \times (-2) - 12 = 24 - 12 - 12 = 0$ et $f'(1) = 6 \times 1^2 + 6 \times 1 - 12 = 6 + 6 - 12 = 0$

Attention : La réciproque n'est pas vraie : il existe des fonctions qui admettent une dérivée nulle en un point sans pour autant avoir un extremum en ce point. Cela signifie que la courbe admet une tangente horizontale mais sans changer de sens de variation.

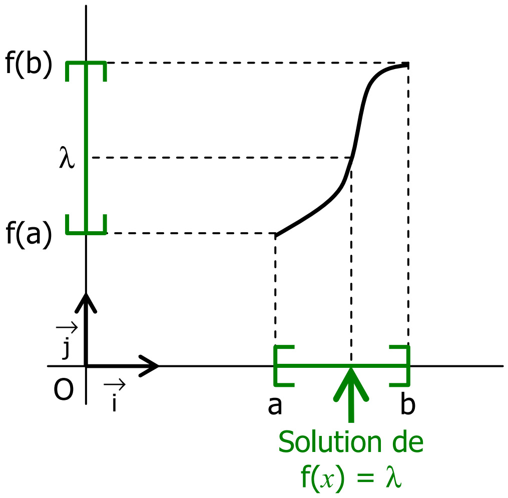


VIII. EQUATION DE LA FORME f(x) = λ

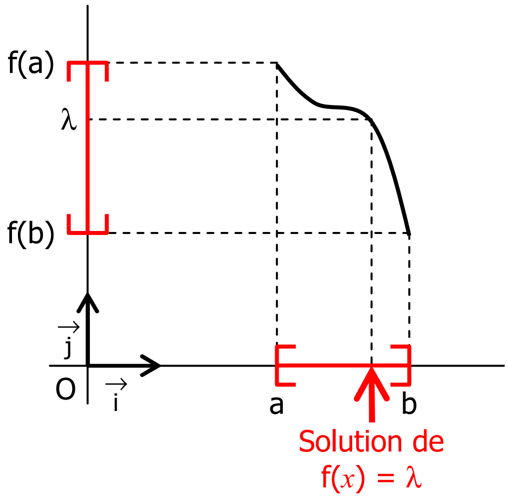
Théorème :

Soit f est dérivable sur [a ; b], avec a < b :

Si f′ est à valeurs strictement positives sur [a ; b],
Alors :
f est strictement croissante sur [a ; b] et pour tout élément λ de [f(a) ; f(b)] l'équation f(x) = λ admet une solution et une seule dans [a ; b].



Si f′ est à valeurs strictement négatives sur [a ; b],
Alors :
f est strictement décroissante sur [a ; b] et pour tout élément λ de [f(b) ; f(a)] l'équation f(x) = λ admet une solution et une seule dans [a ; b].



Exemple : On considère la fonction f : $x \longmapsto x^2 - x - 3$ sur l'intervalle [0 ; 3]

→ On détermine f′(x) = $2x - 1$

→ On étudie le signe de f :

x	0	$\frac{1}{2}$	3
f′(x)	–		+

- f′ est strictement positive sur [2 ; 3]
- f(2) = $2^2 - 2 - 3$ = **-1** et f(3) = $3^2 - 3 - 3$ = **3**

Alors d'après le théorème, l'équation pour tout élément λ de [-1 ; 3] l'équation f(x) = λ admet une solution et une seule dans [2 ; 3].

En particulier, puisque $0 \in [-1 ; 3]$ alors l'équation f(x) = 0 admet une solution et une seule dans [2 ; 3].

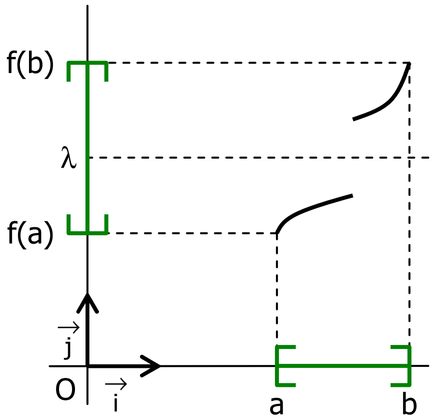
Remarques :

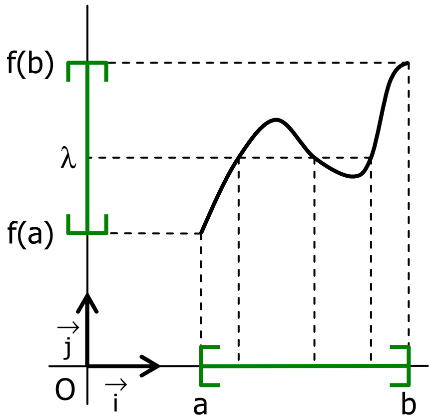
Pour utiliser ce théorème il faut bien vérifier que…

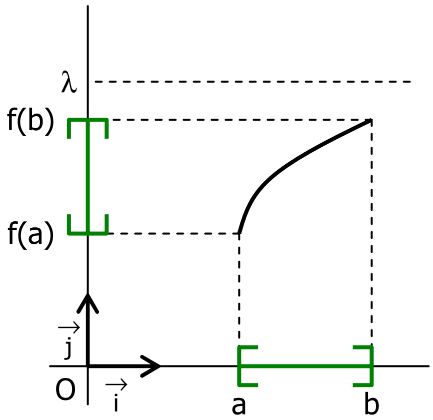
… f est **dérivable** sur [a ; b] sinon f(x) = λ risque de ne pas avoir de solution.

… f est **strictement croissante** (décroissante) sur [a ; b] sinon f(x) = λ risque d'avoir plusieurs solutions.

… $\lambda \in$ **[f(a) ; f(b)]** sinon f(x) = λ n'aura pas de solution.







IX. EXEMPLE D'ETUDE D'UNE FONCTION

Voici la marche à suivre pour étudier une fonction f définie sur un intervalle [a ; b]. Le but ultime de cette étude est le tracé de la courbe $\mathscr{C}$ représentant f, avec un maximum de renseignements.

1. Calcul de la dérivée de f

- En essayant de la mettre sous forme factorisée, ou sous la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont factorisés.
- On évitera de développer, en particulier les dénominateurs, surtout si ce sont des « carrés ».

2. Etude du signe de f'

- Si f est sous la forme ax + b → Petit tableau de signe.
- Si f est sous la forme ax^2 + bx + c → calcul du discriminant Δ et interprétation.
- Si f est un quotient, on étudie le signe du numérateur et du dénominateur. En particulier, on se souviendra que si l'un des deux est un carré, il est toujours positif.
- Si f contient des fonctions cos et/ou sin, on sera ramené à la résolution d'inéquations trigonométriques (le cercle peut être très utile) où l'on oubliera pas que cos x et sin x sont toujours compris entre -1 et 1.

3. Tableau de variation de f

- On traduit l'étude du signe de la dérivée : $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ croissante et $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ décroissante.
- Quand $f'(x) = 0$, cela signifie que $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale (maximum, minimum ou point d'inflexion).
- Ne pas oublier de calculer les valeurs de f aux points remarquables (bornes de l'ensemble de définition, maximum…)

4. Recherche des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec les axes (Ox) et (Oy)

- Intersection de $\mathscr{C}$ avec (Ox) : On cherche le(les) nombres x_0 tel que $f(x_0) = 0$
  → $\mathscr{C}$ coupe (Ox) au(x) point(s) de coordonnées (x_0 ; 0)
- Intersection de $\mathscr{C}$ avec (Oy) : On calcule f(0)
  → $\mathscr{C}$ coupe (Oy) au point de coordonnées (0 ; f(0))

5. Tangentes à la courbe aux points remarquables

- On connaît déjà les tangentes horizontales (voir **2.** et **3.**)
- On détermine la (les) tangente(s) au(x) point(s) d'intersection avec les axes, déterminé(s) dans le **4.** en utilisant la formule $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

6. Construction de la courbe

- Tracer les deux axes, en respectant bien l'échelle donnée dans l'énoncé, et en restreignant l'axe (Ox) à l'ensemble de définition de la fonction.
- Placer les points d'intersection avec les axes, les maximums, minimums, points d'inflexion.
- Construire les tangentes (inutile de tracer « entièrement » la droite, se contenter du petit morceau autour du point de tangence).
- Construire la courbe en lissant autant que possible, et évitant les points anguleux.