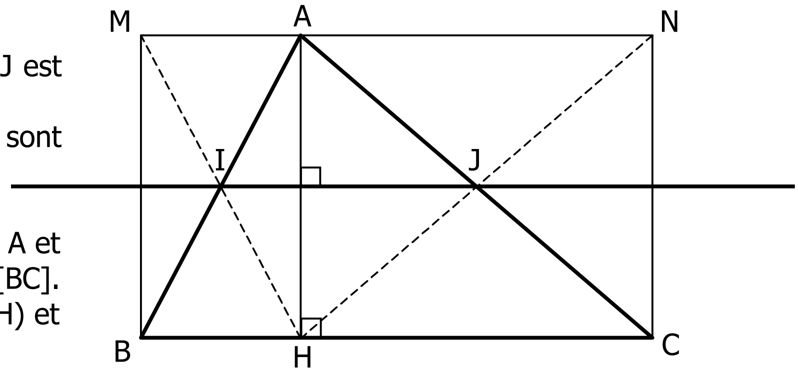
PREMIER THÉORÈME DES MILIEUX.

ABC est un triangle. I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [AC].

On veut démontrer que les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.



a. On trace la hauteur relative au coté issue de A et on note H son point d'intersection avec [BC]. Evidemment – c'est une hauteur – les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

b. On construit les symétriques de H par rapport à I puis par rapport à J (symétrie centrale, bien entendu). On les nomme M et N.

c. Le quadrilatère MAHB est un parallélogrammes car ses diagonales [MH] et [AB] ont le même milieu I. De plus, il a un angle droit (en H) donc c'est un rectangle.

Donc ses diagonales ont la même longueur c'est à dire MI = BI = **<u>AI = HI</u>**.

I est équidistant de A et de H: La médiatrice de [AH] passe par I.

De la même façon, HAHC est un rectangle et NJ = CJ = **<u>AJ = HJ</u>**.

J est équidistant de A et de H: La médiatrice de [AH] passe aussi par J.

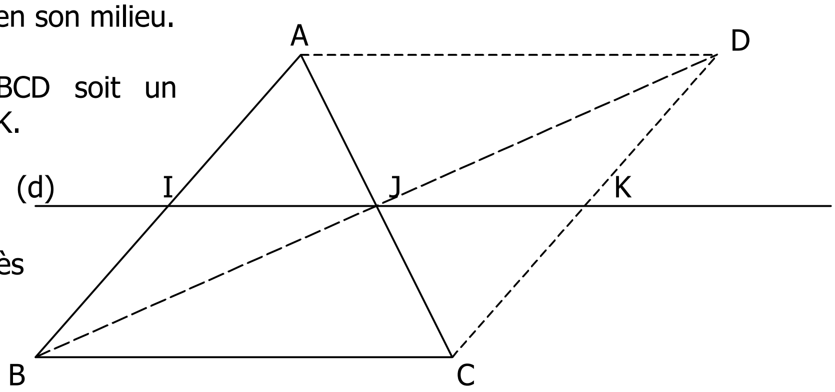
d. La droite (IJ) est LA médiatrice de [AH]. Donc (IJ) esdt perpendiculaire à [AH].

Conclusion: (IJ) et (BC) sont toutes les deux perpendiculaires à [AH]: elles sont parallèles – CQFD.

SECOND THÉORÈME DES MILIEUX.

ABC est un triangle. I est le milieu de [AB] et (d) est la parallèle à (BC) passant par I.

On veut démontrer que la droite coupe [AC] en son milieu.



a. On construit le point D, tel que ABCD soit un parallélogramme. La droite (d) coupe [CD] en K.

b. (AI) et (CK) sont parallèles (car ABCD est un parallélogramme). (IK) – c'est à dire la droite (d) – et (BC) sont parallèles, d'après l'énoncé.

Donc IBCK est un parallélogramme.

Donc IB = CK.

De la même manière, IADK est un parallélogramme donc IA = DK

I étant le milieu de [AB], IA = IB = **<u>CK = DK</u>** donc K est le milieu de [CD].

c. On appelle J le centre de symétrie du parallélogramme ABCD, et on va essayer de démontrer que J est aussi sur la droite (d).

Le segment [AB] a pour symétrique par rapport à J le segment [CD] (Car J est centre de symétrie du parallélogramme).

I étant le milieu de [AB] et K étant le milieu de [CD], deux segments symétriques par rapport à J, on peut conclure que I et K sont symétriques par rapport à J et donc J est un point de (d).

Conclusion : Le point J est le point d'intersection de (d) et de[AC], c'est le milieu de [AC].