RAPPEL :
f est **croissante** sur I signifie que, pour tous réels a et b de I, f(a) et f(b) sont dans le même ordre que a et b.
f est **décroissante** sur I signifie que, pour tous réels a et b, f(a) et f(b) sont dans l'ordre inverse de a et b.

EXERCICE 1

Compléter par < ou > :

$a < b$ et $f(a) < f(b)$ $\Leftrightarrow$ $b - a$ ...... 0 et $f(b) - f(a)$ ...... 0 $\Leftrightarrow$ $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 0

$a < b$ et $f(a) > f(b)$ $\Leftrightarrow$ $b - a$ ...... 0 et $f(b) - f(a)$ ...... 0 $\Leftrightarrow$ $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 0

$a > b$ et $f(a) < f(b)$ $\Leftrightarrow$ $b - a$ ...... 0 et $f(b) - f(a)$ ...... 0 $\Leftrightarrow$ $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 0

$a > b$ et $f(a) > f(b)$ $\Leftrightarrow$ $b - a$ ...... 0 et $f(b) - f(a)$ ...... 0 $\Leftrightarrow$ $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ 0

Le nombre $T = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est appelé **taux de variation** de f. On admet la propriété suivante :

f est **croissante** sur I $\Leftrightarrow$ T est **positif** pour tout a et b appartenant à I
f est **décroissante** sur I $\Leftrightarrow$ T est **négatif** pour tout a et b appartenant à I

EXERCICE 2 - Étude d'une fonction affine

Soit f la fonction définie sur $]-\infty ; +\infty[$ par $f : x \longmapsto -2x + 3$

1. Montrer que $f(b) - f(a) = -2(b - a)$

2. On suppose que $a < b$. Calculer $T = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Quel est le signe de T ?

3. En déduire le sens de variation de f sur $]-\infty ; +\infty[$.

EXERCICE 3 - Étude de la fonction « carré »

Soit g la fonction définie sur $]-\infty ; +\infty[$ par $g : x \longmapsto x^2$

1. Montrer que $g(b) - g(a) = (a + b)(b - a)$

2. On suppose que $a < b$. Calculer $T = \dfrac{g(b) - g(a)}{b - a}$ en le simplifiant au maximum.

3. a. Quel est le signe de T si $0 < a < b$?
b. Quel est le signe de T si $a < b < 0$?

4. En déduire le tableau de variation de g.

EXERCICE 4 - Étude d'une fonction polynôme du second degré

Soit h la fonction définie sur $]-\infty ; +\infty[$ par $h : x \longmapsto x^2 - 6x + 5$

1. Montrer que $h(b) - h(a) = (b - a)(a + b - 6)$

2. On suppose que $a < b$. Calculer $T = \dfrac{h(b) - h(a)}{b - a}$ en le simplifiant au maximum.

3. a. Quel est le signe de T si $3 \leq a < b$?
b. Quel est le signe de T si $a < b < 3$?

4. En déduire le tableau de variation de h.

EXERCICE 5 - Étude d'une fonction rationnelle

Soit k la fonction définie sur $]-\infty ; 3[\cup]3 ; +\infty[$ par $k : x \longmapsto \dfrac{5}{x - 3}$

1. Montrer que $k(b) - k(a) = \dfrac{-5(b - a)}{(a - 3)(b - 3)}$

2. On suppose que $a < b$. Calculer $T = \dfrac{k(b) - k(a)}{b - a}$ en le simplifiant au maximum.

3. a. Quel est le signe de T si $3 \leq a < b$?
b. Quel est le signe de T si $a < b < 3$?

4. En déduire le tableau de variation de k.