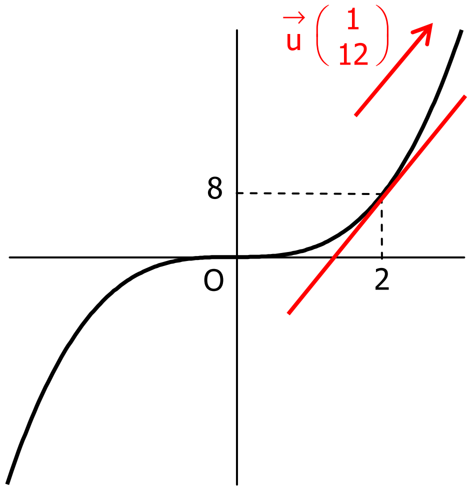
PROGRAMMES	CAPACITES ATTENDUES	COMMENTAIRES
Dérivation Nombre dérivé d'une fonction en un point. Tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point où elle est dérivable.	 Tracer une tangente connaissant le nombre dérivé.	Le nombre dérivé est défini comme limite du taux d'accroissement $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand *h* tend vers 0. On ne donne pas de définition formelle de la limite en un point ; l'approche reste intuitive. L'utilisation des outils logiciels facilite l'introduction du nombre dérivé.
Fonction dérivée Dérivée des fonctions usuelles : $x \longmapsto 1/x$, $x \longmapsto x^n$ (*n* entier naturel non nul), $x \longmapsto \cos x$, $x \longmapsto \sin x$ Dérivée d 'une somme,d 'un produit et d 'un quotient. Dérivée de $t \longmapsto \cos(\omega t+\varphi)$, $t \longmapsto \sin(\omega t+\varphi)$, ω et φ étant réels.	 Calculer la dérivée de fonctions.	 On évite tout excès de technicité dans les calculs de dérivation. Si nécessaire, dans le cadre de la résolution de problèmes, le calcul de la dérivée d'une fonction est facilité par l'utilisation d'un logiciel de calcul formel.
Lien entre signe de la dérivée et sens de variation. Extremum d'une fonction.	- Exploiter le tableau de variation d'une fonction *f* pour obtenir : - un éventuel extremum de *f* ; - le signe de *f* ; - le nombre de solutions d'une équation du type f(x)=k	Pour les fonctions étudiées, le tableau de variation est un outil pertinent pour localiser la ou les solutions éventuelles de l'équation f(x)=k. Cette partie du programme se prête particulièrement à l'étude de situations issues des autres disciplines.

I. TANGENTE A UNE COURBE

Soit f une fonction dérivable en x_0.
On appelle **tangente à la courbe représentative de f au point x_0** la droite passant par le point A(x_0 ; f(x_0)) et de coefficient directeur f′(x_0).



Exemple :
La fonction f : $x \longmapsto x^3$ admet au point (2 ; 8) une tangente dont le coefficient directeur est 12.

Théorème :
Soit f une fonction dérivable en x_0.
La courbe représentative de f admet au point A(x_0 ; f(x_0)) une tangente dont l'équation réduite est :

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

Exemple :
La tangente à f : $x \longmapsto x^3$ admet au point A(2 ; 8) admet pour équation :

$$y = 12(x - 2) + 8 \quad \Leftrightarrow \quad y = 12x - 24 + 8 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{y = 12x - 16}$$

II. SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION

Théorème :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de ℝ.
Si f′(x) est **strictement positive** pour tout x de I, alors f est **strictement croissante** sur I
Si f′(x) est **strictement négative** pour tout x de I, alors f est **strictement décroissante** sur I

Exemple :
Soit f(x) = $2x^3 + 3x^2 - 12x + 6$.
→ On calcule la fonction dérivée : $f'(x) = 2(3x^2) + 3(2x) - 12 = 6x^2 + 6x - 12$
→ On étudie le signe de $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$
$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 6 \times (-12) = 36 + 288 = 324 = 18^2$
Les deux solutions sont $x_1 = \dfrac{-6 + 18}{2 \times 6} = \dfrac{12}{12} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-6 - 18}{2 \times 6} = \dfrac{-24}{12} = -2$
Et le signe de f′(x) est donc donné par :

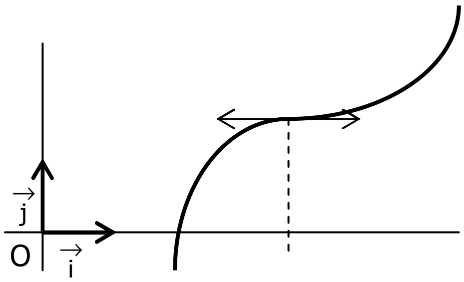
x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f′(x)		+	0	−	0	+	
f(x)		↗	26	↘	-1	↗	

III. EXTREMUM

Théorème :
Si f est dérivable sur I et admet un extremum local (maximum ou minimum) en un point x_0 distinct des extrémités de I, alors $f'(x_0) = 0$

Exemple :
Soit $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 6$.
On constate sur le tableau de variation de f qu'elle admet un maximum local en -2 et un minimum local en 1.
Et on constate que :
$f'(-2) = 6 \times (-2)^2 + 6 \times (-2) - 12 = 24 - 12 - 12 = 0$ et $f'(1) = 6 \times 1^2 + 6 \times 1 - 12 = 6 + 6 - 12 = 0$

Attention : La réciproque n'est pas vraie : il existe des fonctions qui admettent une dérivée nulle en un point sans pour autant avoir un extremum en ce point. Cela signifie que la courbe admet une tangente horizontale mais sans changer de sens de variation. On dit alors qu'on a un **point d'inflexion**.

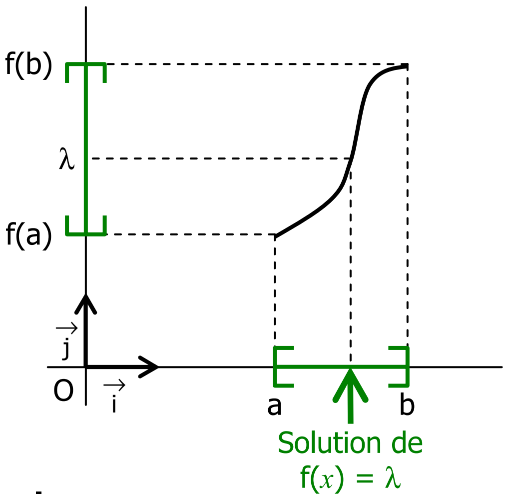


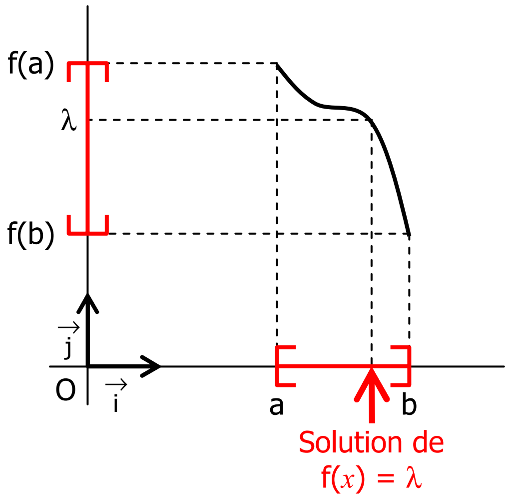
IV. EQUATION DE LA FORME $f(x) = \lambda$

Théorème :
Soit f est dérivable sur [a ; b], avec a < b :

Si f' est à valeurs strictement positives sur [a ; b],
Et si λ appartient à [f(a) ; f(b)]
Alors l'équation $f(x) = \lambda$ admet une solution et une seule dans [a ; b].

Si f' est à valeurs strictement négatives sur [a ; b],
Et si λ appartient à [f(b) ; f(a)]
Alors l'équation $f(x) = \lambda$ admet une solution et une seule dans [a ; b].





Exemple :
On considère la fonction $f : x \longmapsto x^2 - x - 3$ sur l'intervalle [0 ; 3]
→ On détermine $f'(x) = 2x - 1$
→ On étudie le signe de f :

x	0		$\frac{1}{2}$		3
$f'(x)$		−		+	

- f' est strictement positive sur [2 ; 3]
- **f(2)** $= 2^2 - 2 - 3 =$ **-1** et **f(3)** $= 3^2 - 3 - 3 =$ **3**
- $0 \in$ [**f(2)** ; **f(3)**]

Alors d'après le théorème, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule dans [2 ; 3].

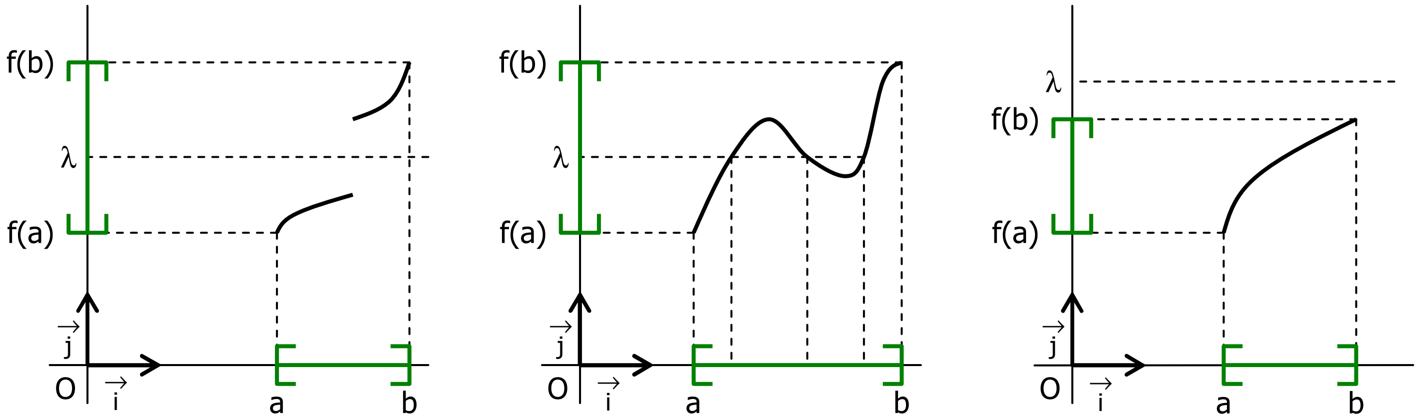
Remarques :

Pour utiliser ce théorème il faut bien vérifier que…

… f est **dérivable** sur [a ; b] sinon f(x) = λ risque de ne pas avoir de solution.

… f est **strictement croissante** (décroissante) sur [a ; b] sinon f(x) = λ risque d'avoir plusieurs solutions.

… **λ ∈ [f(a) ; f(b)]** sinon f(x) = λ n'aura pas de solution.



V. EXEMPLE D'ETUDE D'UNE FONCTION

Voici la marche à suivre pour étudier une fonction f définie sur un intervalle [a ; b]. Le but ultime de cette étude est le tracé de la courbe $\mathscr{C}$ représentant f, avec un maximum de renseignements.

1. Calcul de la dérivée de f

- En essayant de la mettre sous forme factorisée, ou sous la forme $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont factorisés.
- On évitera de développer, en particulier les dénominateurs, surtout si ce sont des « carrés ».

2. Etude du signe de f'

- Si f est sous la forme ax + b → Petit tableau de signe.
- Si f est sous la forme ax^2 + bx + c → calcul du discriminant Δ et interprétation.
- Si f est un quotient, on étudie le signe du numérateur et du dénominateur. En particulier, on se souviendra que si l'un des deux est un carré, il est toujours positif.
- Si f contient des fonctions cos et/ou sin, on sera ramené à la résolution d'inéquations trigonométriques (le cercle peut être très utile) où l'on oubliera pas que cos x et sin x sont toujours compris entre -1 et 1.

3. Tableau de variation de f

- On traduit l'étude du signe de la dérivée : $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ croissante et $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ décroissante.
- Quand $f'(x) = 0$, cela signifie que $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale (maximum, minimum ou point d'inflexion).
- Ne pas oublier de calculer les valeurs de f aux points remarquables (bornes de l'ensemble de définition, maximum…)

4. Recherche des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec les axes (Ox) et (Oy)

- Intersection de $\mathscr{C}$ avec (Ox) : On cherche le(les) nombres x_0 tel que $f(x_0) = 0$
  → $\mathscr{C}$ coupe (Ox) au(x) point(s) de coordonnées $(x_0 ; 0)$
- Intersection de $\mathscr{C}$ avec (Oy) : On calcule f(0)
  → $\mathscr{C}$ coupe (Oy) au point de coordonnées (0 ; f(0))

5. Tangentes à la courbe aux points remarquables

- On connaît déjà les tangentes horizontales (voir **2.** et **3.**)

- On détermine la (les) tangente(s) au(x) point(s) d'intersection avec les axes, déterminé(s) dans le **4.** en utilisant la formule y = f'(x_0) ($x - x_0$) + f(x_0)

6. Construction de la courbe

- Tracer les deux axes, en respectant bien l'échelle donnée dans l'énoncé, et en restreignant l'axe (Ox) à l'ensemble de définition de la fonction.
- Placer les points d'intersection avec les axes, les maximums, minimums, points d'inflexion.
- Construire les tangentes (inutile de tracer « entièrement » la droite, se contenter du petit morceau autour du point de tangence).
- Construire la courbe en lissant autant que possible, et évitant les points anguleux.