PROGRAMMES	CAPACITES ATTENDUES	COMMENTAIRES
Dérivation Nombre dérivé d'une fonction en un point. Tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point où elle est dérivable.	Tracer une tangente connaissant le nombre dérivé.	Le nombre dérivé est défini comme limite du taux d 'accroissement $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0. On ne donne pas de définition formelle de la limite en un point ; l'approche reste intuitive. L'utilisation des outils logiciels facilite l'introduction du nombre dérivé.
Fonction dérivée Dérivée des fonctions usuelles : $x \longmapsto 1/x$, $x \longmapsto x^n$ (*n* entier naturel non nul), $x \longmapsto \cos x$, $x \longmapsto \sin x$ Dérivée d 'une somme,d 'un produit et d 'un quotient. Dérivée de $t \longmapsto \cos(\omega t+\varphi)$, $t \longmapsto \sin(\omega t+\varphi)$, ω et φ étant réels.	Calculer la dérivée de fonctions.	On évite tout excès de technicité dans les calculs de dérivation. Si nécessaire, dans le cadre de la résolution de problèmes, le calcul de la dérivée d'une fonction est facilité par l'utilisation d'un logiciel de calcul formel.
Lien entre signe de la dérivée et sens de variation. Extremum d'une fonction.	- Exploiter le tableau de variation d'une fonction *f* pour obtenir : - un éventuel extremum de *f* ; - le signe de *f* ; - le nombre de solutions d'une équation du type f(x)=k	Pour les fonctions étudiées, le tableau de variation est un outil pertinent pour localiser la ou les solutions éventuelles de l'équation f(x)=k. Cette partie du programme se prête particulièrement à l'étude de situations issues des autres disciplines.

I. FONCTION AFFINE (RAPPEL)

Toute fonction affine peut s'écrire sous la forme f(x) = ax + b avec :

→ **a =** $\mathbf{\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}}$: **taux d'accroissement**, c'est-à-dire le coefficient de proportionnalité entre l'accroissement de x et celui de f(x). Il correspond à au coefficient directeur (la pente) de la droite qui représente la fonction.

Exemple : Si f(x) = 3x + 5, le taux d'accroissement est 3.
Cela signifie « quand x s'accroît de 1 unité, f(x) accroît de 3 unités ».

II. DERIVATION EN UN POINT

a. Approximation d'une fonction quelconque par une fonction affine

On considère une fonction quelconque f.

On considère la fonction affine g passant par les points A et B d'abscisses respectives a et $a + h$ c'est-à-dire telles que :

f(a) = g(a) et f(a + h) = g(a + h).

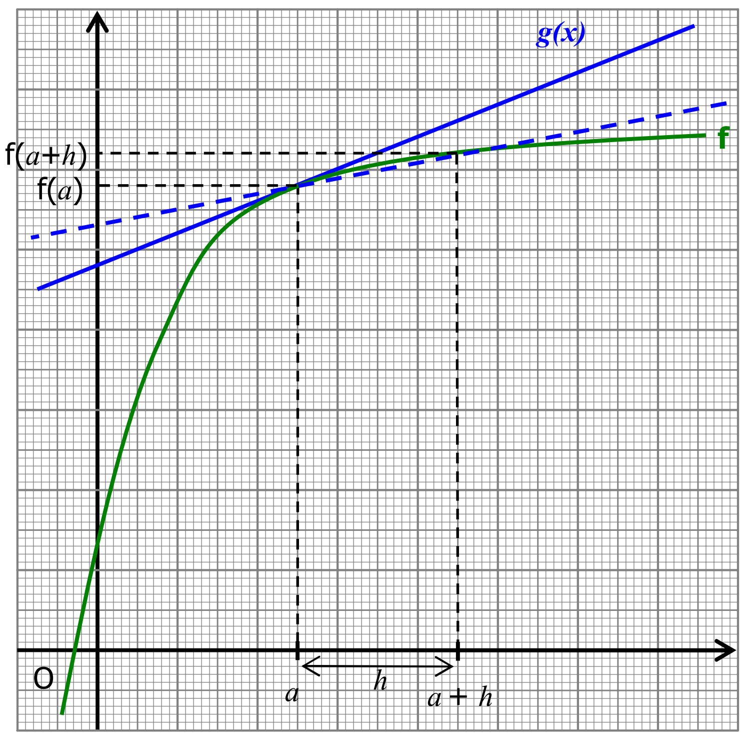
Le taux de variation de cette fonction affine est :

$$\tau = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\tau = \frac{g(a+h) - g(a)}{a+h-a}$$

$$\tau = \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

$$\boldsymbol{\tau = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$



Or, il semble bien que « quand A et B sont proches » c'est-à-dire quand h est petit, la droite de la fonction g se « stabilise » en une tangente à la courbe de f.

b. Fonction dérivable en un point

Définition :
Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant a

On dit que f est **dérivable** en a si et seulement si il existe un réel vers lequel « tend » $\tau = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ lorsque h est infiniment petit.

Ce nombre est appelé le **nombre dérivé** de f en a, et on le note **f′(a)**.

III. FONCTION DERIVEE

a. Définition

Définition :
Soit f dérivable sur un intervalle I. La fonction qui, à tout x de I, associe son nombre dérivé, est appelée **fonction dérivée** de f et est notée f′.

Exemple : La fonction f : $x \longmapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{f' : x \longmapsto 2x}$

b. Fonctions dérivées des fonctions usuelles

De la même façon, on détermine les fonctions dérivées suivantes :

fonction :	définie sur :	dérivable sur :	fonction dérivée :
$f(x) = k$ (constante)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = 1/x^n$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -n/x^{n+1}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^{+*}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$

c. Opérations sur les fonctions dérivées

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle I. On admettra les résultats suivants :

	f	f′
1. Somme	$u + v$	$u' + v'$
2. Produit par un réel constant	$k.u$	$k.u'$
3. Produit de deux fonctions	$u.v$	$u'.v + u.v'$
4. Carré d'une fonction	u^2	$2u'.u$
5. Inverse	$\dfrac{1}{u}$ avec $u(x) \neq 0$ sur I	$\dfrac{-u'}{u^2}$
6. Quotient	$\dfrac{u}{v}$ avec $v(x) \neq 0$ sur I	$\dfrac{u'.v - u.v'}{v^2}$

d. Exemples

1. Somme

→ Soit $f(x) = x^2 + x^5$. Alors $f'(x) = 2x + 5x^4$.

2. Produit par un réel constant

→ Soit $f(x) = 2x^3$. Alors $f'(x) = 2(3x^2) = 6x^2$.

→ Soit $g(x) = 5x$. Alors $f'(x) = 5(1) = 5$.

Conséquence de **1.** et **2.** : Tout polynôme est dérivable sur ℝ.

→ $P(x) = 6x^3 + 3x^2 - 7x + 4$. Alors $P'(x) = 6(3x^2) + 3(2x) - 7(1) + 0 = 18x^2 + 6x - 7$

3. Produit de deux fonctions

→ Soit $f(x) = x\sqrt{x}$. Alors $f'(x) = 1.\sqrt{x} + x.\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

4. Carré d'une fonction

→ Soit $f(x) = (5x + 3)^2$. Alors $f'(x) = 2 \times 5 \times (5x + 3) = 10(5x + 3)$

5. Inverse

→ Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3}$. Alors $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2 - 3)^2}$

6. Quotient

→ Soit $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{3x - 4}$. Alors $f'(x) = \dfrac{2x(3x - 4) - 3(x^2 + 3)}{(3x - 4)^2} = \dfrac{6x^2 - 8x - 3x^2 - 9}{(3x - 4)^2} = \dfrac{3x^2 - 8x - 9}{(3x - 4)^2}$

IV. FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES COMPOSEES

Théorème :

Soit une fonction g obtenue en composant une fonction f et une fonction affine, donc $g(x) = f(ax + b)$.
Alors/

$$\boxed{g'(x) = a \times f'(ax + b)}$$

En particulier :

Soit les fonctions :

$f(t) = \cos(\omega t+\varphi)$ et $g(t) = \sin(\omega t+\varphi)$

où ω et φ sont des nombres réels.

Leurs dérivées sont

$f'(t) = -\omega.\sin(\omega t+\varphi)$ et $g'(t) = \omega.\cos(\omega t+\varphi)$