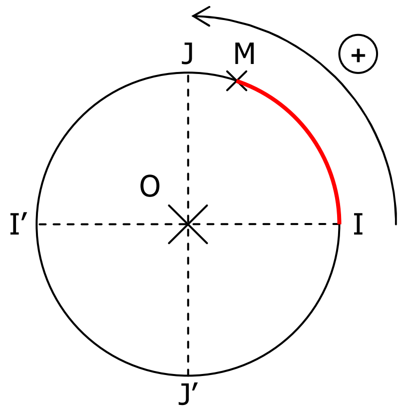
PROGRAMMES	CAPACITES ATTENDUES	COMMENTAIRES
Fonctions circulaires Éléments de trigonométrie : cercle trigonométrique, radian, mesure d'un angle orienté, mesure principale. Fonctions de référence : $x \to \cos x$ et $x \to \sin x$.	- Utiliser le cercle trigonométrique, notamment pour : - déterminer les cosinus et sinus d'angles associés ; - résoudre dans R les équations d'inconnue t : $\cos t = \cos a$ et $\sin t = \sin a$. - Connaître la représentation graphique de ces fonctions. - Connaître certaines propriétés de ces fonctions, notamment parité et périodicité.	On fait le lien entre : - les résultats obtenus en utilisant le cercle trigonométrique ; - les représentations graphiques des fonctions $x \to \cos x$ et $x \to \sin x$. Selon les besoins, on peut introduire les coordonnées polaires pour l'étude de certaines situations. La lecture graphique est privilégiée.

I. MESURE D'UN ANGLE EN RADIANS

a. Repérage d'un point sur le cercle trigonométrique

On appelle *cercle trigonométrique* un cercle de rayon 1 (le sens anti-horaire), autour du quel on a « enroulé » la droite numérique. L'origine est le point I. On définit ensuite un sens de rotation appelé « sens direct »



A tout réel x, on associe un point M sur le cercle de la façon suivante :
- si $x > 0$, on parcourt la distance x sur le cercle en partant du point I dans le sens direct.
- si $x < 0$, on parcourt la distance x sur le cercle en partant du point I dans le sens indirect.

La longueur de l'arc $\overset{\frown}{\text{IM}}$ est alors $|x|$.

Exemples :

La longueur totale du cercle est : $2 \times \pi \times R = 2 \times \pi \times 1 = 2\pi$

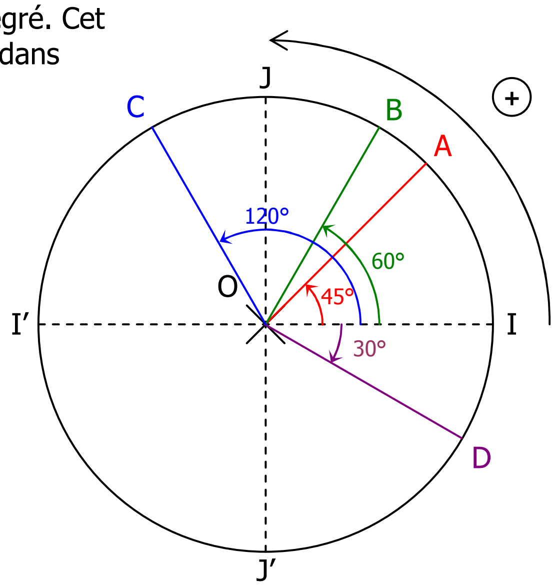
Le point J est repéré par le nombre : $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ (un quart de tour dans le sens direct)

Le point J' est repéré par le nombre : $-\frac{\pi}{2}$ (un quart de tour dans le sens indirect) ou $\frac{3\pi}{2}$ (trois quarts de tour dans le sens direct)

b. Radian

La **longueur de l'arc** intercepté par un angle au centre du cercle trigonométrique est proportionnelle à la mesure de l'angle en degré. Cet angle est **orienté**, c'est-à-dire positif ou négatif suivant le sens dans lequel on tourne.

Cette longueur est appelée **mesure en radians** de l'angle



Exemples :

$\widehat{IOA} = 45° = \frac{1}{8}$ de tour $= \frac{1}{8} \times 2\pi = \frac{\pi}{4}$ rad

$\widehat{IOB} = 60° = \frac{1}{6}$ de tour $= \frac{1}{6} \times 2\pi = \frac{\pi}{3}$ rad

$\widehat{IOC} = 120° = \frac{1}{3}$ de tour $= \frac{1}{3} \times 2\pi = \frac{2\pi}{3}$ rad

$\widehat{IOD} = 30° = \frac{1}{12}$ de tour (sens indirect) $= -\frac{1}{12} \times 2\pi = -\frac{\pi}{6}$ rad

$\widehat{IOI'} = 180°$ = un demi-tour $= \pi$ rad

Remarque :

Tout angle admet une infinité de mesures. Par exemple l'angle 0 peut aussi avoir pour mesure 2π (un tour), 4π (deux tours…), -2π…

On appellera **mesure principale** LA mesure en radian appartenant à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$. Toutes les autres mesures sont obtenues en ajoutant/retranchant un nombre entier de « tours » de mesure 2π .

Exemple :

Déterminer la mesure principale de l'angle $\frac{43\pi}{4}$.

On va retrancher un certain nombre de fois 2π c'est à dire $\frac{8\pi}{4}$ pour obtenir une mesure entre $-\pi$ et π.

$\frac{43\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = \frac{35\pi}{4}$; $\frac{35\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = \frac{27\pi}{4}$; $\frac{27\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = \frac{19\pi}{4}$; $\frac{19\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = \frac{11\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Et $\frac{3\pi}{4} \in\ ]-\pi\,;\pi]$. C'est la mesure principale de cet angle.

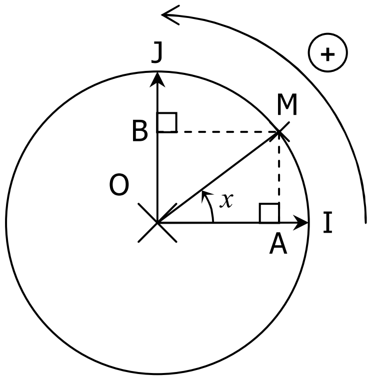
II. COSINUS ET SINUS

a. Définition

Soit x la mesure en radian d'un angle, et M le point tel que $\widehat{IOM} = x$

On appelle **cos x l'abscisse de M.**

On appelle **sin x l'ordonnée de M.**

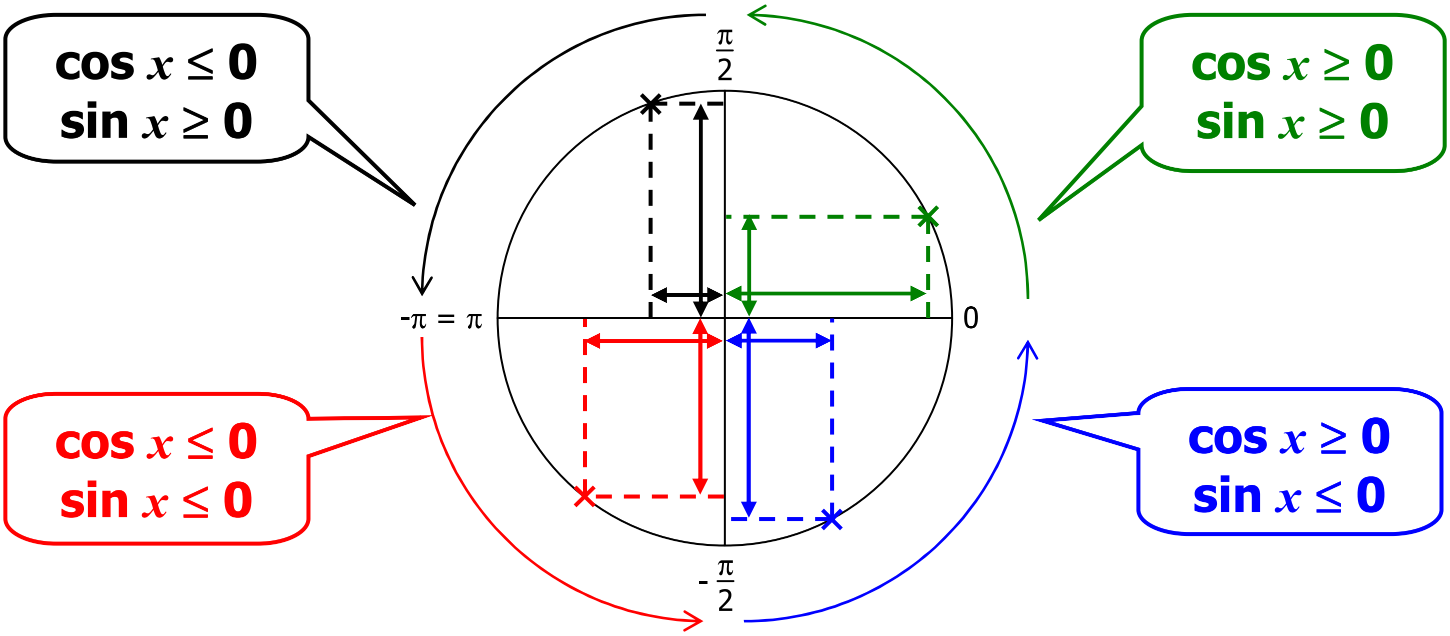


Remarques :

- Pour tout x, on a $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
- Dans le triangle OAM rectangle en A on a OM = 1, OA = cos x et AM = sin x, alors d'après le théorème de Pythagore $OA^2 + AM^2 = OM^2$

  et donc : $\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$

b. Signe



c. Propriétés

Pour tout x, on a :

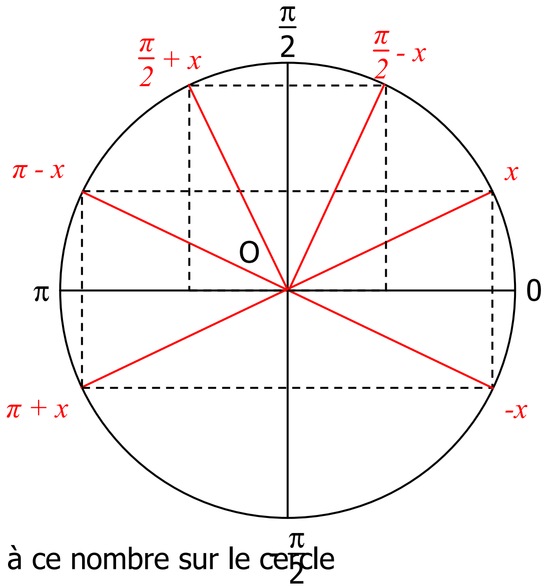
$\boxed{-1 \leq \cos x \leq 1}$ $\boxed{-1 \leq \sin x \leq 1}$ $\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$

d. Valeurs remarquables

x (radians)	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

d. Propriétés de symétrie

$\cos(-x) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$
$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$
$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$	$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$
$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$	$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$



III. LES FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

a. La fonction cosinus

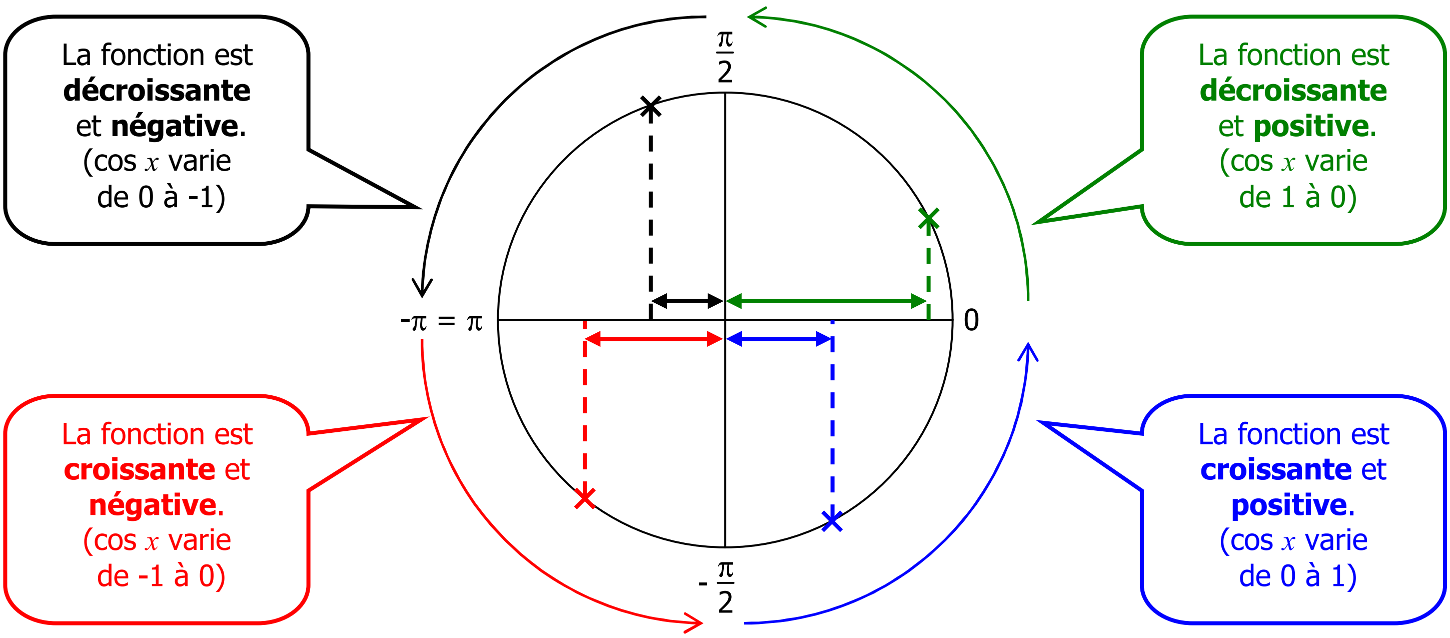
Tout nombre réel a un cosinus (c'est l'abscisse du point M associé à ce nombre sur le cercle trigonométrique).

On appelle **fonction cosinus** la fonction $f : x \longmapsto \cos x$ définie sur $]-\infty ; +\infty[$.

Remarques :

- Puisque pour tout x, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, on n'étudiera la fonction que sur l'intervalle $]-\pi ; \pi]$. On dit que cette fonction est **périodique**, de période 2π.
- Pour tout x, $\cos(-x) = \cos(x)$, donc la fonction cosinus est **paire** (la courbe est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées).

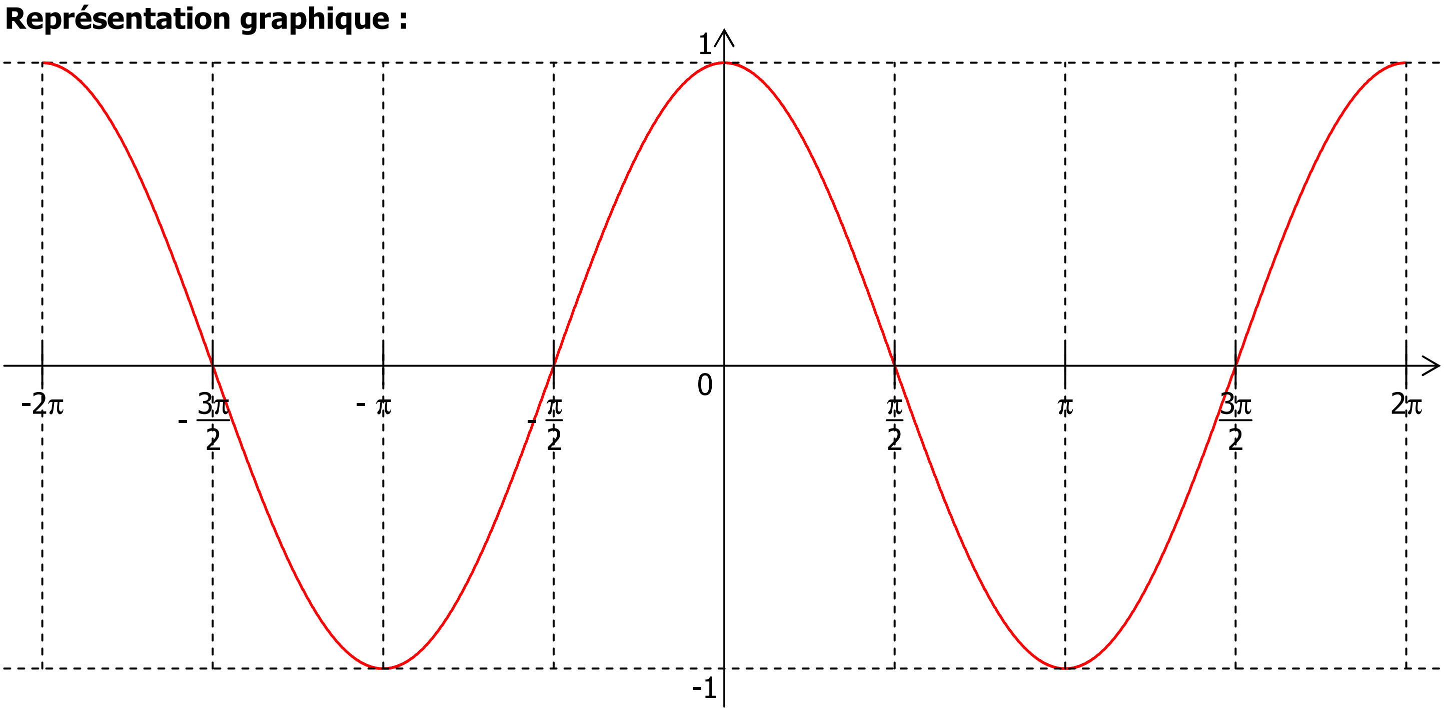
Sens de variation de la fonction cosinus sur l'intervalle $]-\pi ; \pi]$



Conclusion :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		$+\pi$
$\cos x$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

Représentation graphique :



b. La fonction sinus

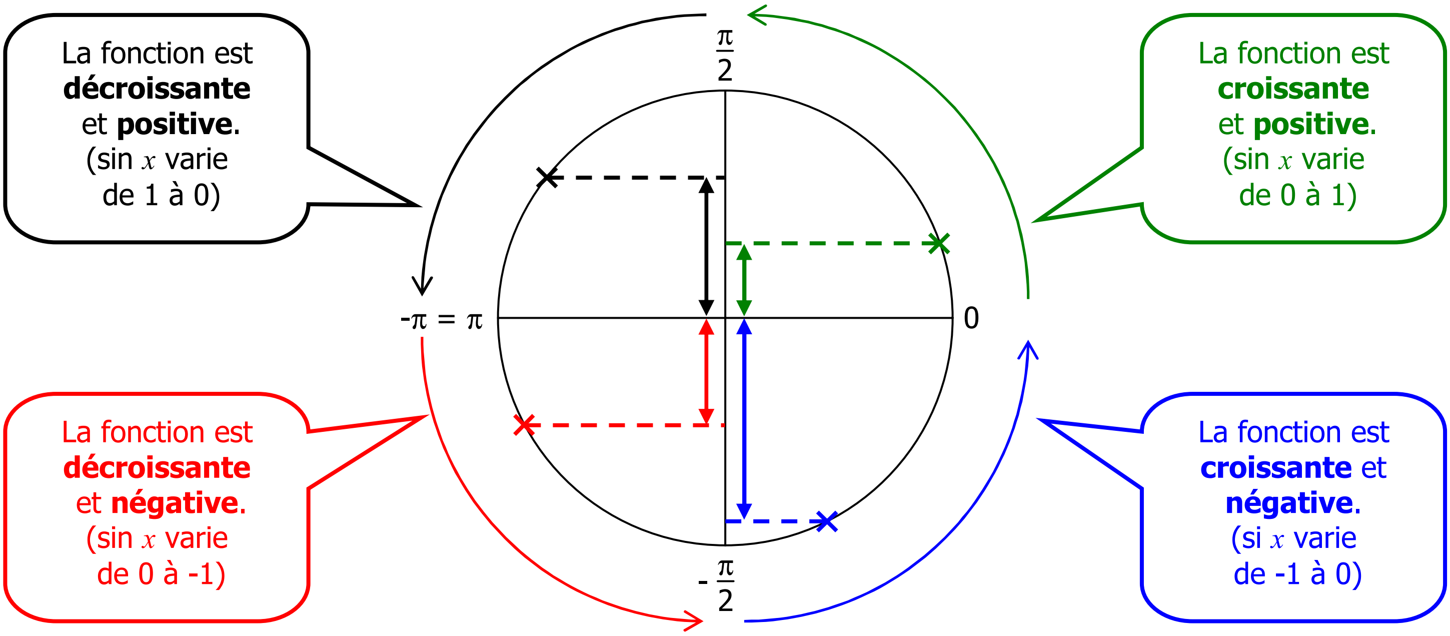
Tout nombre réel a un sinus (c'est l'ordonnée du point M associé à ce nombre sur le cercle trigonométrique).

On appelle **fonction sinus** la fonction $f : x \longmapsto \cos x$ définie sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$.

Remarque :

- Puisque pour tout x, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, on n'étudiera la fonction que sur l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$. On dit que cette fonction est **périodique**, de période 2π.
- Pour tout x, $\sin(-x) = -\sin(x)$, donc la fonction cosinus est **impaire** (la courbe est donc symétrique par rapport à l'origine du repère).

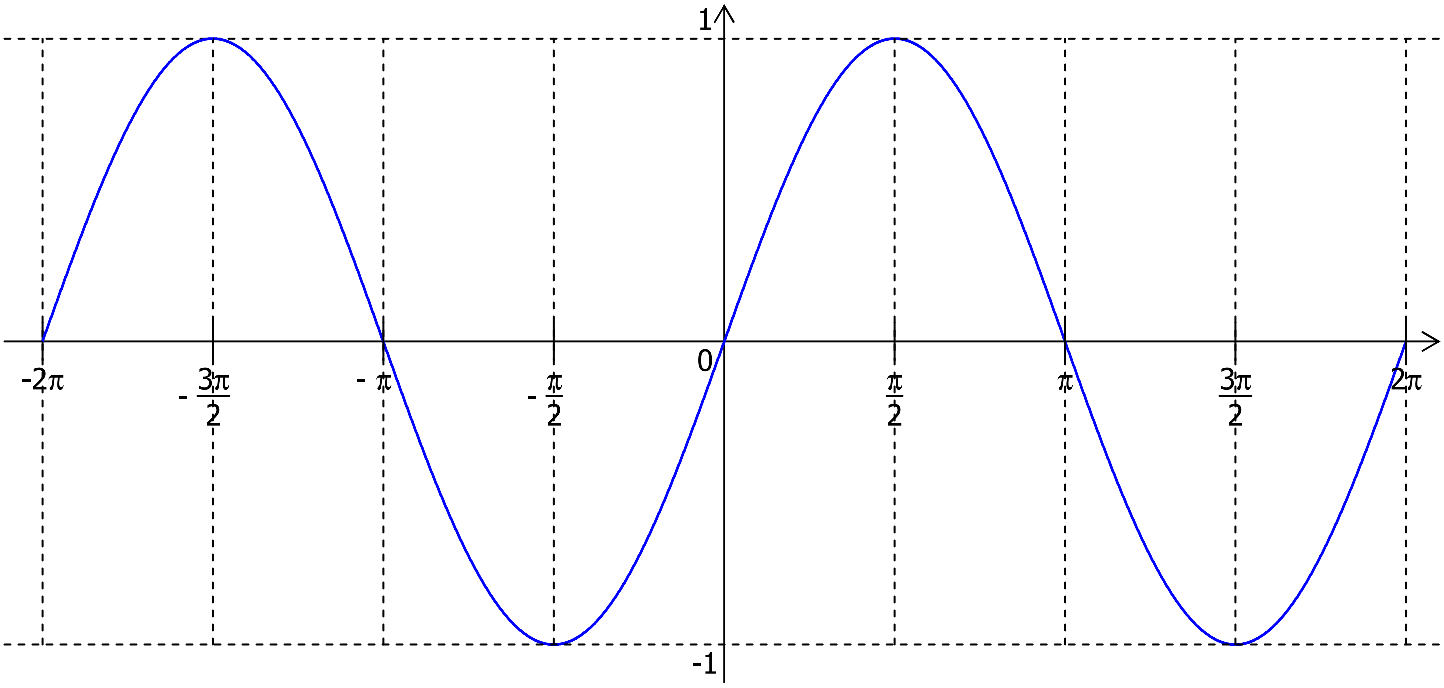
Sens de variation de la fonction sinus sur l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$



Conclusion :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		$+\pi$
$\sin x$	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0

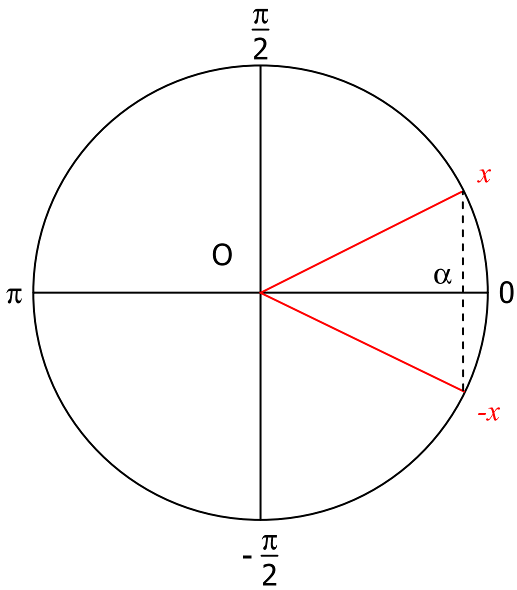
Représentation graphique :



IV. EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

a. Equation du type « cos x = cos a »

$\cos a = -1$	L'équation **cos x = -1** admet pour solution tous les nombres sous la forme : $\boxed{x = \pi + k2\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$
$-1 < \cos a < 1$	L'équation **cos x = cos a** admet pour solution tous les nombres sous la forme : $\boxed{x = a + k2\pi \text{ ou } x = -a + k2\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$
$\cos a = 1$	L'équation **cos x = 1** admet pour solution tous les nombres sous la forme : $\boxed{x = k2\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$



Exemple :

Résoudre sur $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$ l'équation : $\cos x = \frac{1}{2}$

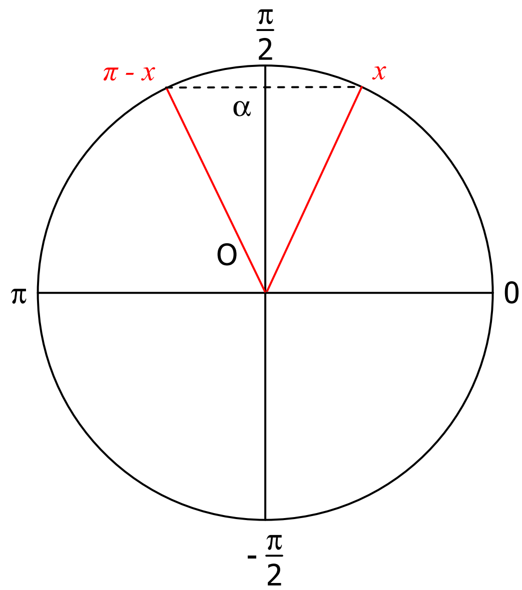
→ On sait que $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, donc les solutions de l'équation sont de la forme :

$$\boxed{x = \frac{\pi}{3} + k2\pi} \text{ ou } \boxed{x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

C'est-à-dire : … $\mathbf{\frac{-5\pi}{3}}$; $\mathbf{\frac{\pi}{3}}$; $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{13\pi}{3}$ … ou … $\frac{-7\pi}{3}$; $\mathbf{\frac{-\pi}{3}}$; $\mathbf{\frac{5\pi}{3}}$; $\frac{11\pi}{3}$ … donc $S = \left\{ \frac{-5\pi}{3} ; \frac{\pi}{3} ; \frac{-\pi}{3} ; \frac{5\pi}{3} \right\}$

b. Equation du type « sin x = sin a »

sin a = -1	L'équation **sin x = -1** admet pour solution tous les nombres sous la forme : $\boxed{x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$
-1 < sin a < 1	L'équation **sin x = α** admet pour solution tous les nombres sous la forme : $\boxed{x = a + k2\pi \text{ ou } x = \pi - a + k2\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$
sin a = 1	L'équation **sin x = 1** admet pour solution tous les nombres sous la forme : $\boxed{x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$



Exemple :

Résoudre sur [-2π ; 2π] l'équation : sin $x = \frac{1}{2}$

→ On sait que sin $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, donc les solutions de l'équation sont de la forme :

$$\boxed{x = \frac{\pi}{6} + k2\pi} \text{ ou } \boxed{x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

C'est-à-dire : … $\mathbf{\frac{-11\pi}{6}}$; $\mathbf{\frac{\pi}{6}}$; $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{25\pi}{6}$ … ou … $\frac{-19\pi}{6}$; $\mathbf{\frac{-7\pi}{6}}$; $\mathbf{\frac{5\pi}{6}}$; $\frac{17\pi}{6}$ … donc S = { $\mathbf{\frac{-11\pi}{6}}$; $\mathbf{\frac{-7\pi}{6}}$; $\mathbf{\frac{\pi}{6}}$; $\mathbf{\frac{5\pi}{6}}$ }