Consolider l'ensemble des fonctions mobilisables : On enrichit cet ensemble de nouvelles fonctions de référence :les fonctions cosinus,sinus et valeur absolue. L'emploi régulier de notations variées sur les fonctions est indispensable, notamment pour aider les élèves à faire le lien avec les autres disciplines.

CONTENUS	CAPACITES ATTENDUES	COMMENTAIRES
Étude de fonctions Fonction de référence $x \longmapsto \|x\|$	Connaître les variations de cette fonction et sa représentation graphique.	On se limite à la présentation de la fonction. Aucune technicité dans l'utilisation de la valeur absolue n'est attendue.
Représentation graphique des fonctions $u + k$, $t \longmapsto u(t + \lambda)$ et $\|u\|$, la fonction u étant connue, k étant une fonction constante et λ un réel.	Obtenir la représentation graphique de ces fonctions à partir de celle de u.	Il s'agit ici de développer une aisance dans la manipulation des représentations graphiques, par exemple lors de la détermination des paramètres d'un signal sinusoïdal. L'étude générale de la composée de deux fonctions est hors programme.

I. NOTION DE FONCTION

a. Définition

Soit D un ensemble de nombre.

On appelle **fonction** f sur l'ensemble D le *mécanisme mathématique* qui permet d'associer à tout nombre x de D en un réel unique noté f(x). On note f : $x \longmapsto f(x)$.

b. Vocabulaire

- f(x) est l'**image** de x ;
- x est l'**antécédent** de f(x) ;
- D est l'**ensemble de définition** (ou domaine de définition) de f.

Exemple : Sur l'intervalle [-2 ; 2], on définit la fonction f par : $x \longmapsto f(x) = (x - 1)^2 - 3$

$f(-2) = (-2 - 1)^2 - 3 = (-3)^2 + 3 = 9 - 3 = 6$: L'image de -2 par la fonction f est 6.
$f(-1) = (-1 - 1)^2 - 3 = (-2)^2 + 3 = 4 - 3 = 1$: L'image de -1 par la fonction f est 1.
$f(0) = (0 - 1)^2 - 3 = (-1)^2 - 3 = 1 - 3 = -2$: L'image de 0 par la fonction f est -2.
$f(1) = (1 - 1)^2 - 3 = 0 - 3 = -3$: L'image de 1 par la fonction f est -3.
$f(2) = (2 - 1)^2 - 3 = 1^2 - 3 = 1 - 3 = -2$: L'image de 2 par la fonction f est -2.

On peut dresser un tableau des valeurs :

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	6	1	-2	-3	-2

Remarque :

- chaque nombre de l'ensemble de définition a une image et une seule.
- certaines images peuvent avoir plusieurs antécédents.
- si un nombre n'a pas d'image, c'est qu'il n'appartient pas à l'ensemble de définition de la fonction.

c. Sens de variation

Soif f une fonction définie sur un intervalle I.

f est **croissante** sur I quand, pour tous réels a et b de I, f(a) et f(b) sont **dans le même ordre** que a et b.
f est **décroissante** sur I quand, pour tous réels a et b, f(a) et f(b) sont **dans l'ordre inverse** de a et b.

d. représentation graphique

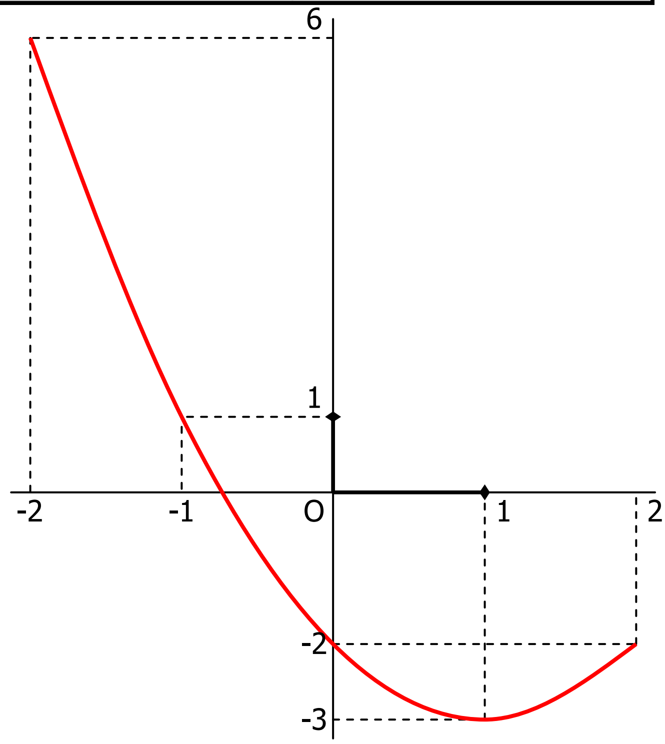
On considère le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On appelle **représentation graphique de la fonction** f l'ensemble des points de coordonnées (x ; f(x)) où x appartient à l'ensemble de définition D.

Exemple :

On va représenter sur l'intervalle [-2 ; 2] la fonction définie par f : $x \longmapsto (x - 1)^2 - 3$

On va utiliser le un tableau des valeurs :

Abscisses	x	-2	-1	0	1	2
Ordonnées	f(x)	6	1	-2	-3	-2



Remarque :

Puisque chaque nombre de l'ensemble de définition a une image et une seule, alors toute droite « verticale » a un point d'intersection et un seul avec la courbe de la fonction.

On parle de la « courbe d'équation $y = (x - 1)^2 - 3$ »

Interprétation graphique du sens de variation :

f est **croissante** sur I si sa courbe « **monte** » quand x croît.

f est **décroissante** sur I si sa courbe « **descend** » quand x croît.

II. FONCTIONS AFFINES

On appelle **fonction affine** toute fonction de la forme $f : x \longmapsto ax + b$ où a (taux d'accroissement) et b (valeur pour $x = 0$) sont des réels fixés.

Exemple :

La fonction f définie sur ℝ par $f : x \longmapsto 3x - 2$ est affine.

Le sens de variation d'une fonction affine ne dépend que du nombre a.

Si a > 0

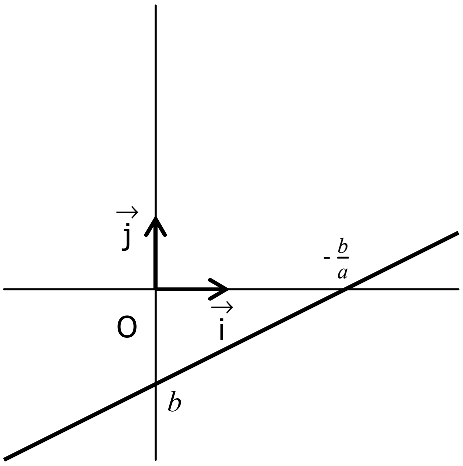
x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
f		0	

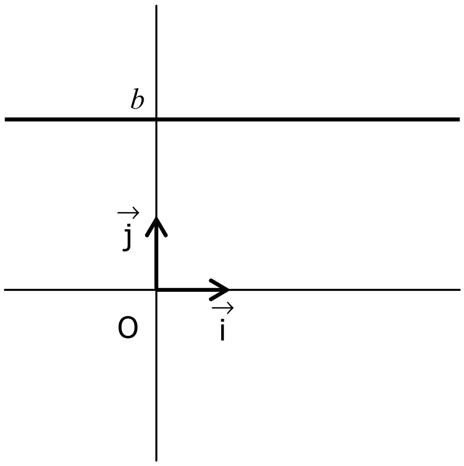
Si a = 0

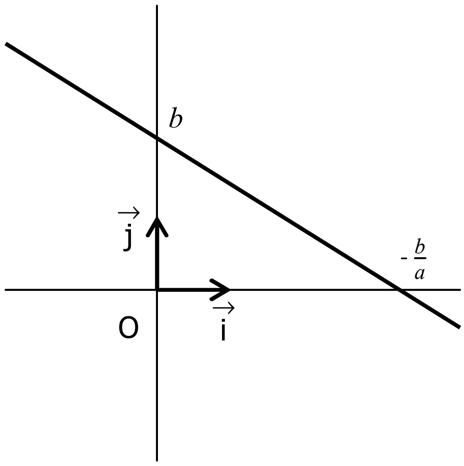
x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
f	La fonction est constant, le tableau n'a aucun interêt		

Si a < 0

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
f		0	







III. AUTRES FONCTIONS DE REFERENCE

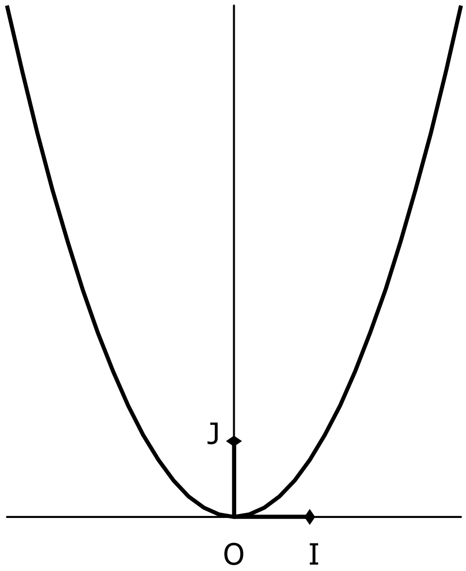
a. Fonction carré

On appelle **fonction carré** la fonction $f : x \longmapsto x^2$ définie sur ℝ

Pour tout x, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$: On dit alors que cette fonction est **paire**, ce qui signifie qu'un nombre et son opposé ont toujours la même image.

Graphiquement, cela signifie que pour toute valeur de x, les points de la courbe M(x ; $f(x)$) et M'($-x$; $f(-x)$) ont la même ordonnée, et sont donc symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		↘	0	↗	



Cette courbe s'appelle une **parabole**

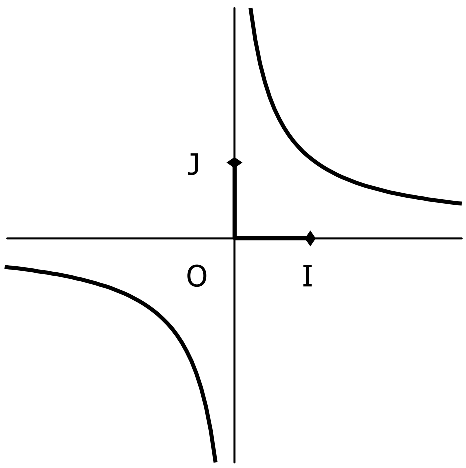
b. Fonction inverse

On appelle **fonction inverse** la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur]-∞ ; 0[∪]0 ; +∞[.

Pour tout x, $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$: on dit alors que cette fonction est **impaire**, ce qui signifie qu'un nombre et son opposé ont des images opposées.

Graphiquement, cela signifie que pour toute valeur de x, les points de la courbe M(x ; $f(x)$) et M'($-x$; $f(-x)$) ont une ordonnée opposée, et sont donc symétriques par rapport à l'origine.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		↘	‖	↘	

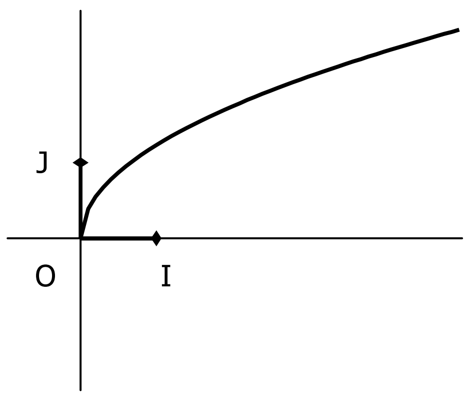


Cette courbe s'appelle une **hyperbole**

c. Fonction racine carrée

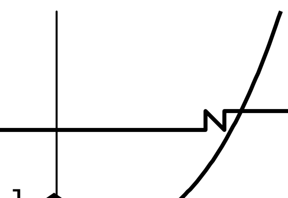
On appelle **fonction racine carrée** la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ définie sur [0 ; +∞[.

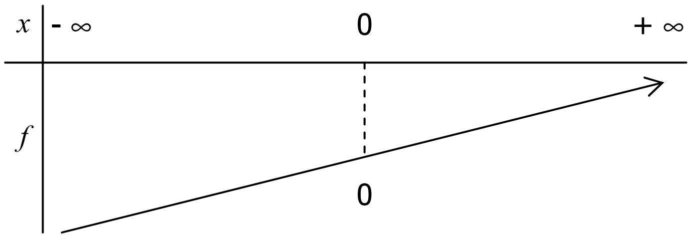
x	0		$+\infty$
f	0	↗	



d. Fonction cube

On appelle **fonction cube** la fonction $f : x \longmapsto x^3$ définie sur ℝ.
Pour tout x, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$: cette fonction est **impaire**





IV. FONCTION VALEUR ABSOLUE

a. Valeur absolue d'un réel

On appelle **valeur absolue** de x la distance entre ce réel et 0 c'est-à-dire :

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}}$$

Remarques :

- « $-x$ » signifie « l'opposé de x », pas forcément un nombre négatif.
- la valeur absolue d'un nombre est toujours positive.

Exemples :

- $2 > 0$ donc $|2| = 2$
- $-5 < 0$ donc $|5| = -(-5) = 5$

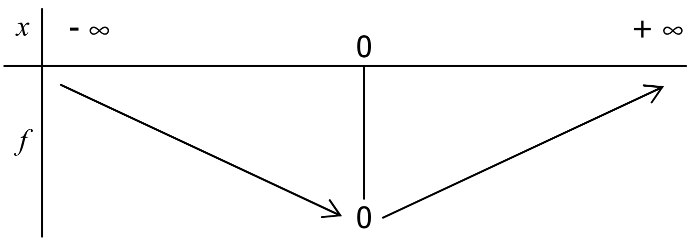
b. Fonction valeur absolue

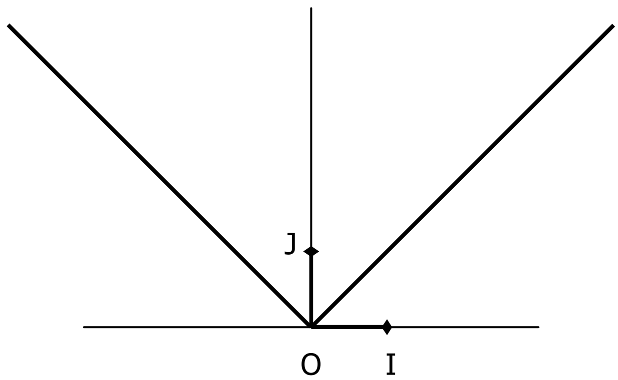
On appelle **fonction valeur absolue** la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ définie sur $]-\infty ; +\infty[$.

Pour tout x, $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$: cette fonction est **paire**, comme la fonction carré.

Cette fonction est :

- affine et décroissante sur $]-\infty ; 0]$
- affine et croissante sur $[0 ; +\infty[$.





V. REPRESENTATION GRAPHIQUE DE FONCTIONS COMPOSEES

a. Composition d'une fonction quelconque par une fonction affine simple

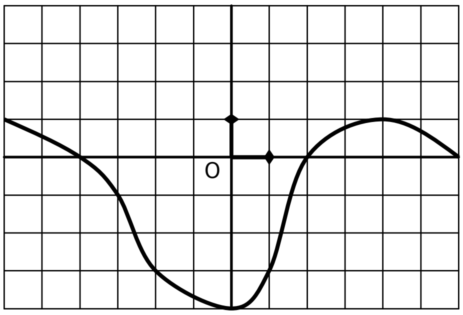
Soit f une fonction définie sur un intervalle I dont on connaît la représentation graphique, et k un réel.

On considère la fonction définie par : $x \longmapsto f(x) + k$.

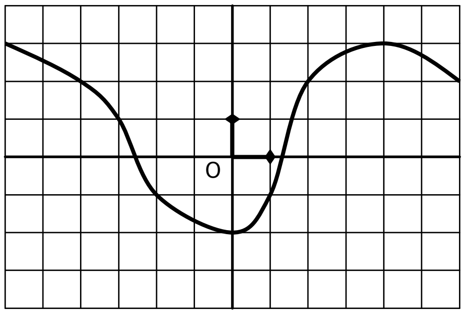
- Si k est **positif**, la représentation de cette fonction $x \longmapsto f(x) + k$ est identique à celle de f mais « translatée de k unités graphiques sur l'axe des **ordonnées vers +∞** (le haut)
- Si k est **négatif**, la représentation de cette fonction $x \longmapsto f(x) + k$ est identique à celle de f mais « translatée de k unités graphiques sur l'axe des **ordonnées vers +∞** (le bas)

Exemple :

Voici la courbe représentant une fonction f :



Voici donc la courbe représentant la fonction $f(x + 2)$:



b. Composition d'une fonction affine simple par une fonction quelconque

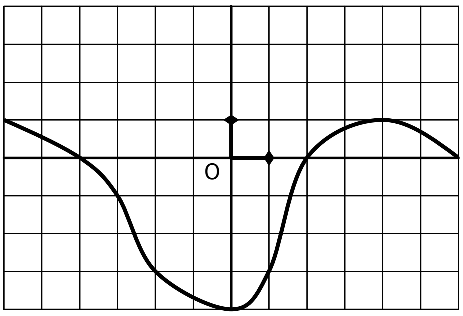
Soit f une fonction définie sur un intervalle I dont on connaît la représentation graphique, et λ un réel.

On considère la fonction définie par : $x \longmapsto f(x + \lambda)$.

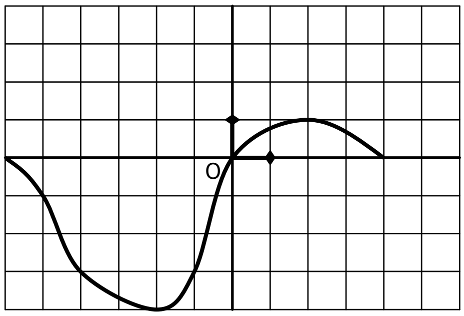
- Si λ est **positif**, la représentation de cette fonction $x \longmapsto f(x + \lambda)$ est identique à celle de f mais « translatée de λ unités graphiques sur l'axe des **abscisses vers -∞** (la gauche)
- Si λ est **négatif**, la représentation de cette fonction $x \longmapsto f(x + \lambda)$ est identique à celle de f mais « translatée de λ unités graphiques sur l'axe des **abscisses vers +∞** (la droite)

Exemple :

Voici la courbe représentant une fonction f :



Voici donc la courbe représentant la fonction $f(x + 2)$:



c. Composition par la fonction valeur absolue

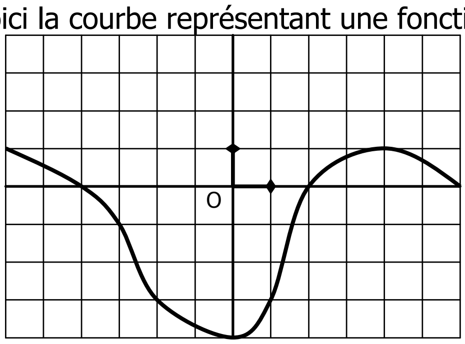
Soit f une fonction définie sur un intervalle I dont on connaît la représentation graphique.

On considère la fonction « valeur absolue de f » notée $|f|$.

- Sur les intervalles où f est **positive**, $|f| = f$ donc les deux représentations graphiques sont **identiques**.
- Sur les intervalles où f est **négative**, $|f| = -f$ donc les deux représentations graphiques sont **symétriques par rapport à l'axe des abscisses**.

Exemple :

Voici la courbe représentant une fonction f :



Voici donc la courbe représentant la fonction $|f|$: