

Rappel des formules d'addition et duplication :

Pour tous réels a et b on a :

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$$

Pour tout réel a on a :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin(2a) = 2 \cos a \cdot \sin a$$

EXERCICE 5A.1

a. Calculer $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

b. A l'aide des formules d'addition, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$. Ces résultats sont-ils cohérents avec ce que nous connaissons déjà ?

EXERCICE 5A.2

a. Calculer $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.

b. A l'aide des formules d'addition, calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

c. Calculer $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$; calculer $\cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 5A.3

1. En utilisant les formules d'addition, démontrer que :

a. $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a + b) + \cos(a - b))$

b. $\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b))$

c. $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a + b) + \sin(a - b))$

2. Transformer les produits suivants en sommes :

a. $A = \cos 3x \cdot \cos 2x$

b. $B = \sin 4x \cdot \sin 2x$

c. $C = \sin x \cdot \cos 3x$

EXERCICE 5A.4

Linéariser les expressions suivantes (c'est-à-dire les écrire sans carré).

a. $A = \cos^2(2x)$

b. $B = \sin^2(3x)$

EXERCICE 5A.5

a. Vérifier que $2 \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$

b. En posant $a = \frac{\pi}{12}$ et en utilisant les formules de duplication, déterminer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 5A.6

a. Vérifier que $2 \times \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

b. En posant $a = \frac{\pi}{8}$ et en utilisant les formules de duplication, déterminer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.