Exploiter l 'outil « produit scalaire » : On travaille avec des vecteurs dans des plans repérés ou non et on privilégie des décompositions selon des axes orthogonaux. Il importe que les élèves sachent choisir la forme du produit scalaire la mieux adaptée au problème envisagé. Les problèmes traités sont plans mais on peut avantageusement exploiter des situations de l 'espace issues de disciplines scientifique s et technologiques.

PROGRAMMES	CAPACITES ATTENDUES	COMMENTAIRES
Produit scalaire dans le plan Projection orthogonale d'un vecteur sur un axe.	Décomposer un vecteur selon deux axes orthogonaux et exploiter une telle décomposition.	
Définition et propriétés du produit scalaire de deux vecteurs dans le plan. Applications du produit scalaire	Calculer le produit scalaire de deux vecteurs par différentes méthodes : - projection orthogonale ; - analytiquement ; - à l'aide des normes et d 'un angle. - Choisir la méthode la plus adaptée en vue de la résolution d 'un problème. - Calculer des angles et des longueurs.	Pour toute cette partie sur le produit scalaire, on exploite des situations issues des domaines scientifiques et technologiques, notamment celles nécessitant du calcul vectoriel dans un cadre non repéré.

Dans tout ce chapitre, le plan est muni d'un repère (O ; I , I) orthogonal.

I. RAPPELS DE GEOMETRIE ANALYTIQUE

Soit A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B) deux points distincts. Alors :

→ le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $\boxed{\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}}$

→ le milieu I de [AB] a pour coordonnées : $\boxed{\left(\dfrac{x_B + x_A}{2} , \dfrac{y_B + y_A}{2}\right)}$

→ la distance entre A et B vaut : $\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$ (uniquement dans un repère orthonormé)

II. VECTEURS DU PLAN

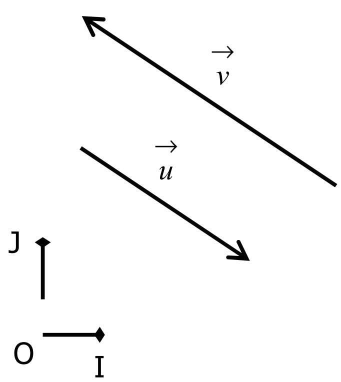
a. Norme d'un vecteur

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur. On appelle norme de $\vec{u}$ (notée $\|\vec{u}\|$) sa longueur. Et on a :

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

b. Vecteurs colinéaires

On dit que deux vecteurs sont colinéaires lorsqu'ils ont la même direction.



PROPRIETE :

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles c'est-à-dire si :

$\boxed{xy' - x'y = 0}$ ← **Critère de colinéarité de deux vecteurs.**

Exemple :

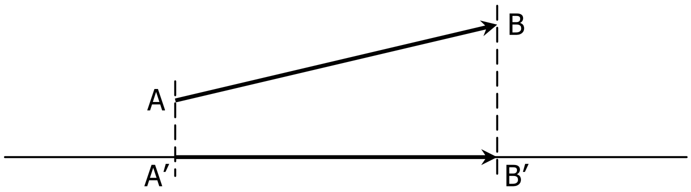
$\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

2 × (-3) – (-6) × (-1) = -6 + 6 = 0 donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

c. Projection orthogonale d'un vecteur sur un axe

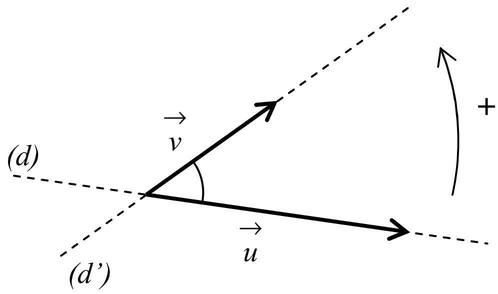
Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur et (d) une droite.

On appelle projection orthogonale de $\overrightarrow{AB}$ sur l'axe (d) le vecteur $\overrightarrow{AB}$ tel que A' et B' appartiennent à (d), et (AA') et (BB') sont perpendiculaires à (d).



d. Angle de deux vecteurs

On appelle angle des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ l'angle **orienté** formé par deux droites (d) et (d') de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On le note $(\vec{u}, \vec{v})$ ou $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.



Remarque : $(\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u})$

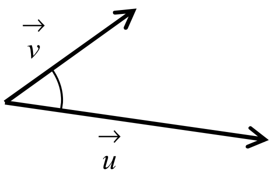
III. PRODUIT SCALAIRE

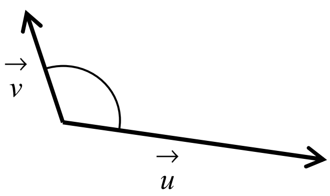
a. Définition

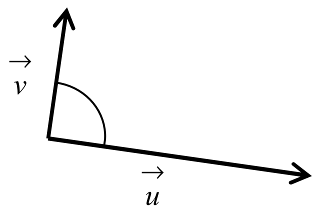
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On appelle produit sclalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le nombre :

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})}$$

Exemples :







$\|\vec{u}\| = 4$; $\|\vec{v}\| = 3$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{4}$

$\vec{u}.\vec{v} = 4 \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$

$\|\vec{u}\| = 5$; $\|\vec{v}\| = 2$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{2\pi}{3}$

$\vec{u}.\vec{v} = 5 \times 2 \times \frac{-1}{2} = -5$

$\|\vec{u}\| = 7$; $\|\vec{v}\| = 3$ et $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$

$\vec{u}.\vec{v} = 7 \times 3 \times 0 = -0$

Remarque : si deux vecteurs sont colinéaires, leur produit scalaire est le produit de leurs normes.

b. Propriétés

On admet les propriétés suivantes, où $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs et k un nombre réel :

→ La **symétrie** du produit scalaire : $\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}}$

→ La **linéarité** du produit scalaire : $\boxed{\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}}$ et $\boxed{k(\vec{u}.\vec{v}) = (k\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.k(\vec{v})}$

c. Orthogonalité

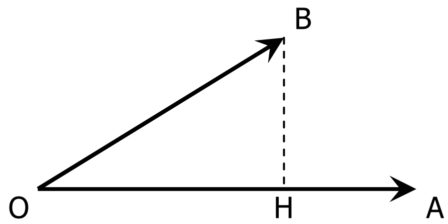
Propriété : Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$

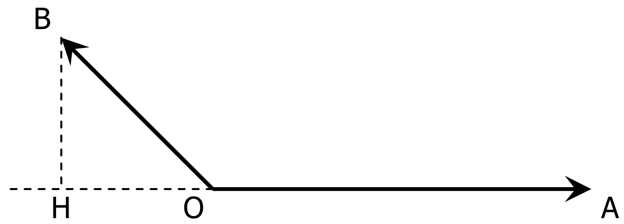
Conséquence : Puisque pour tout vecteur $\vec{u}$, on a $\vec{u}.\vec{0} = 0$, alors le vecteur nul est orthogonal à tous les autres vecteurs.

IV. CALCUL D'UN PRODUIT SCALAIRE

a. A partir d'une projection orthogonale

Soit $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ deux vecteurs non colinéaires, et $\overrightarrow{OH}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{OB}$ sur (OA).





$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH} = \begin{cases} OA \times OH \text{ si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de même sens} \\ -OA \times OH \text{ si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$

b. A partir des coordonnées dans une base orthonormale

Pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on a : $\boxed{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'}$

[démonstration à partir de deux décompositions]

V. UTILISATION DU PRODUIT SCALAIRE

a. Formules d'addition et duplication des fonctions cosinus et sinus

On considère les points A et B sur le cercle trigonométrique.

On pose $\widehat{IOA} = a$ et $\widehat{IOB} = b$ donc $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix}$ et l'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$ vaut $b - a$

Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}$ de deux façons différentes :

→ La définition : $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = ||\overrightarrow{OB}|| \times ||\overrightarrow{OA}|| \times \cos(b-a) = 1 \times 1 \times \cos(b-a) = \cos(b-a)$

→ Les coordonnées : $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = \cos a . \cos b + \sin a . \sin b$

Conclusion : $\cos(b-a) = \cos a . \cos b + \sin a . \sin b$

Formules d'addition : pour tous réels a et b on a :

$$\cos(a+b) = \cos a . \cos b - \sin a . \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a . \cos b + \sin a . \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a . \cos b + \cos a . \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a . \cos b - \cos a . \sin b$$

Dans le cas où a = b, on en déduit les…

Formules de duplication : pour tout réel :

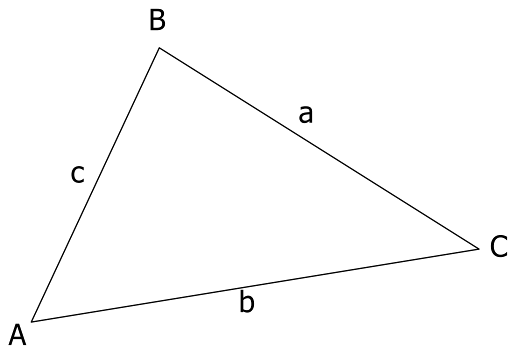
$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$
$$\sin(2a) = 2\cos a \,.\, \sin a$$

b. Relations d'Al Kashi (ou « Loi des cosinus »)

Il doit son nom français au mathématicien perse (Ghiyath al-Kashi) qui a vécu entre 1380 et 1429.
L'appellation *loi des cosinus* est apparue plus tard, aussi en Europe.

On considère le triangle ABC ci-contre :

On pose : $AB = c$
$AC = b$
$BC = a$



Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BC}$ de deux façons différentes :

→ La définition : $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BC} = AB \times BC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})^* = c \times a \times (-\cos\widehat{B}) = -ac\cos\widehat{B}$

(*) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \pi - \widehat{B}$ donc $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = -\cos\widehat{B}$

→ La formule "triangulaire" : $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(b^2 - c^2 - a^2)$

On a donc : $\frac{1}{2}(b^2 - c^2 - a^2) = -ac\cos\widehat{B} \Leftrightarrow b^2 - c^2 - a^2 = -2ac\cos\widehat{B}$ d'où :

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}}$$

De la même façon on pourrait montrer les formules :

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}}$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}}$$

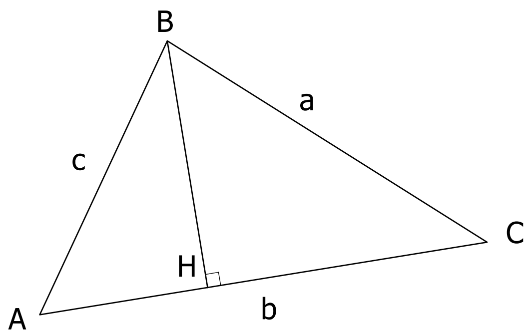
Ces formule permettent de calculer la longueur d'un côté en connaissant les longueurs des deux autres côtés et l'angle qu'ils forment.

c. Formule « des 3 sinus »

On considère le triangle ABC ci-contre :

On appelle BH la hauteur issue de B.

On pose : $AB = c$
$AC = b$
$BC = a$



D'après les formules de trigonométrie : $\sin\widehat{A} = \frac{BH}{AB}$ d'où $BH = AB\sin\widehat{A} = c\sin\widehat{A}$

L'aire du triangle est : $S = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{AC \times BH}{2} = \frac{b \times c\sin\widehat{A}}{2}$

On a donc montré que $S = \frac{bc\sin\widehat{A}}{2}$. On aurait pu montrer de la même façon $S = \frac{ac\sin\widehat{B}}{2}$ ou $S = \frac{ab\sin\widehat{C}}{2}$

Donc $S = \dfrac{bc \sin \widehat{A}}{2} = \dfrac{ac \sin \widehat{B}}{2} = \dfrac{ab \sin \widehat{C}}{2}$ et en multipliant cette égalité par $\dfrac{2}{abc}$ on obtient la « formule des 3 sinus » :

$$\boxed{\dfrac{2S}{abc} = \dfrac{\sin \widehat{A}}{a} = \dfrac{\sin \widehat{B}}{b} = \dfrac{\sin \widehat{C}}{c}}$$