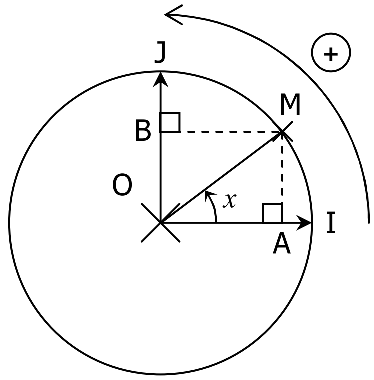
PROGRAMMES	COMMENTAIRES
Etude des fonctions $x \longmapsto \sin x$ et $x \longmapsto \cos x$: dérivée, sens de variation. Equations $\cos x = \alpha$ et $\sin x = \alpha$.	On s'aidera de l'interprétation des résultats sur le cercle trigonométrique. On admet les valeurs des dérivées des fonctions sinus et cosinus.

I. COSINUS ET SINUS

On munit le cercle trigonométrique d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ et d'un sens (le « sens direct »)

Soit M le point tel que $\widehat{IOM} = x$

On appelle mesure en **radians** de l'angle $\widehat{IOM}$ la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$



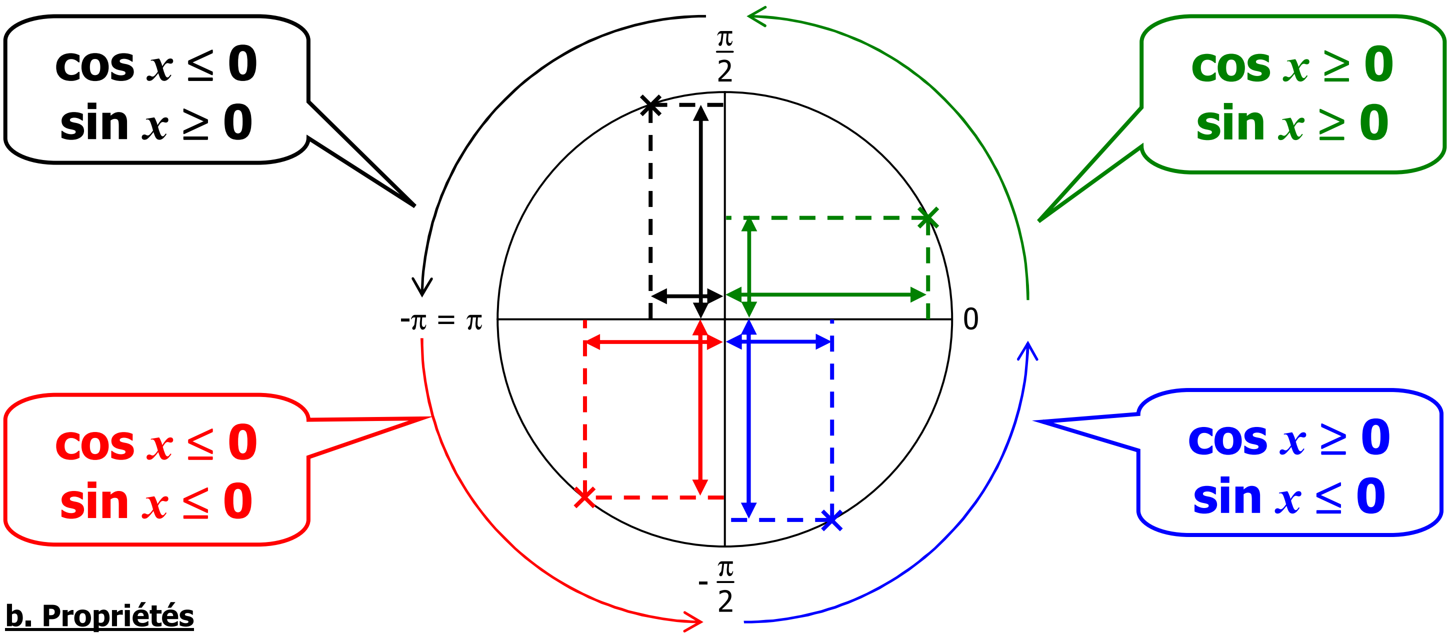
On appelle **cos x l'abscisse de M**.
On appelle **sin x l'ordonnée de M**.

Conclusion :
Si M est le point associé a réel x sur le cercle trigonométrique, alors **M(cos x ; sin x)**.

Remarque :
$x + 2\pi$, $x + 4\pi$, $x + 6\pi$, $x - 2\pi$, … , $x + k2\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) sont aussi des mesures en radian de l'angle x.

II. VALEURS REMARQUABLES DU SINUS ET DU COSINUS

a. Signe



b. Propriétés

Pour tout x, on a :

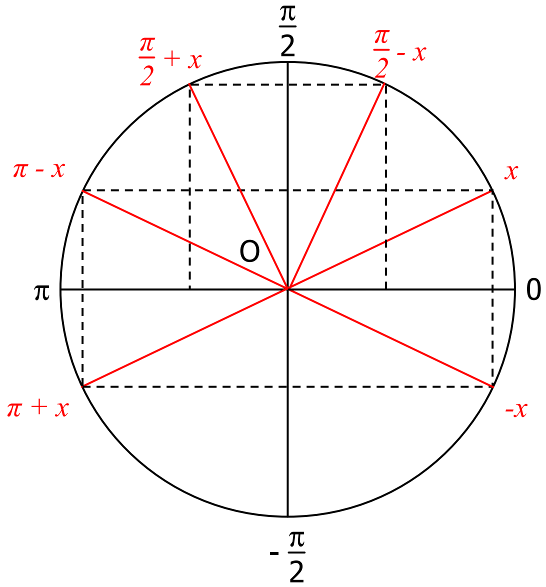
$\boxed{-1 \leq \cos x \leq 1}$ $\boxed{-1 \leq \sin x \leq 1}$ $\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$

c. Valeurs remarquables

x (radians)	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
x (degrés)	**0**	**30**	**45**	**60**	**90**
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

d. Propriétés de symétrie

$\cos(-x) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$
$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$
$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$	$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$
$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$	$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$



III. LES FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

On appelle fonctions trigonométriques les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \longmapsto \cos x \qquad\qquad g : x \longmapsto \sin x$$

1. LA FONCTION COSINUS

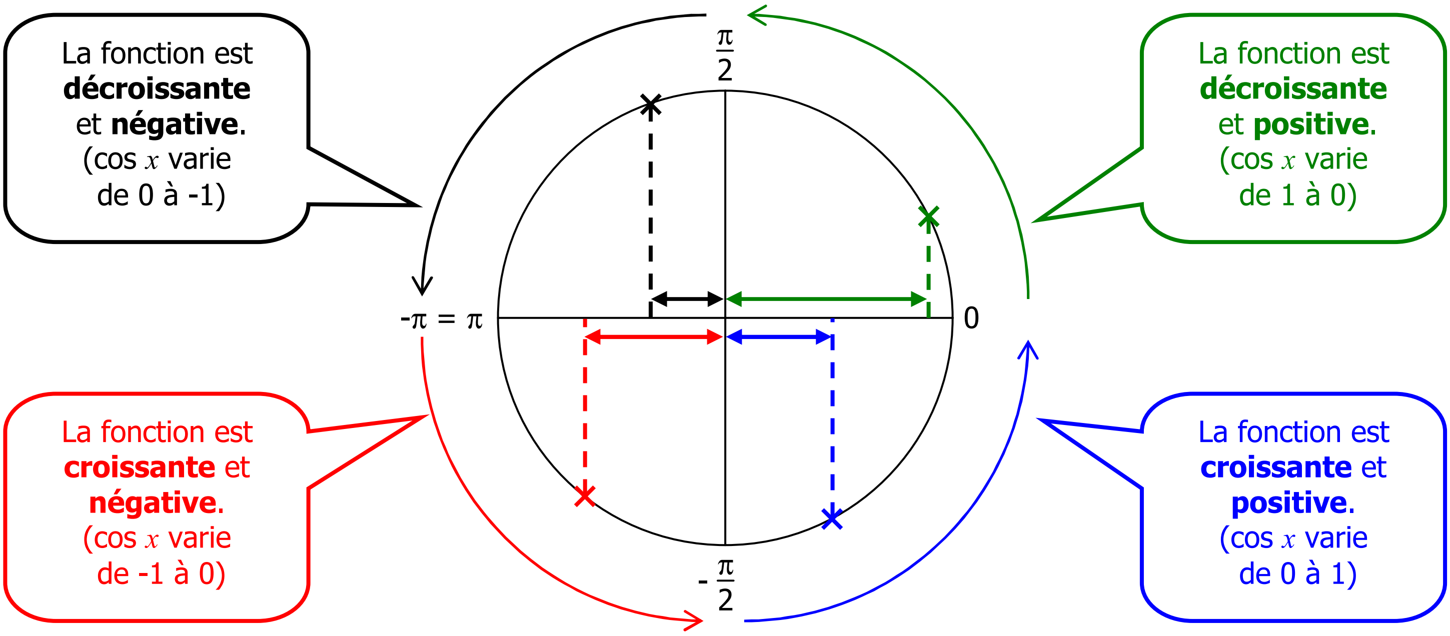
Tout nombre réel a un cosinus (c'est l'abscisse du point M associé à ce nombre sur le cercle trigonométrique).

On appelle **fonction cosinus** la fonction $f : x \longmapsto \cos x$ définie sur $]-\infty ; +\infty[$.

Remarques :

- Puisque pour tout x, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, on n'étudiera la fonction que sur l'intervalle $]-\pi ; \pi]$. On dit que cette fonction est **périodique**, de période 2π.
- Pour tout x, $\cos(-x) = \cos(x)$, donc la fonction cosinus est **paire** (la courbe est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées).

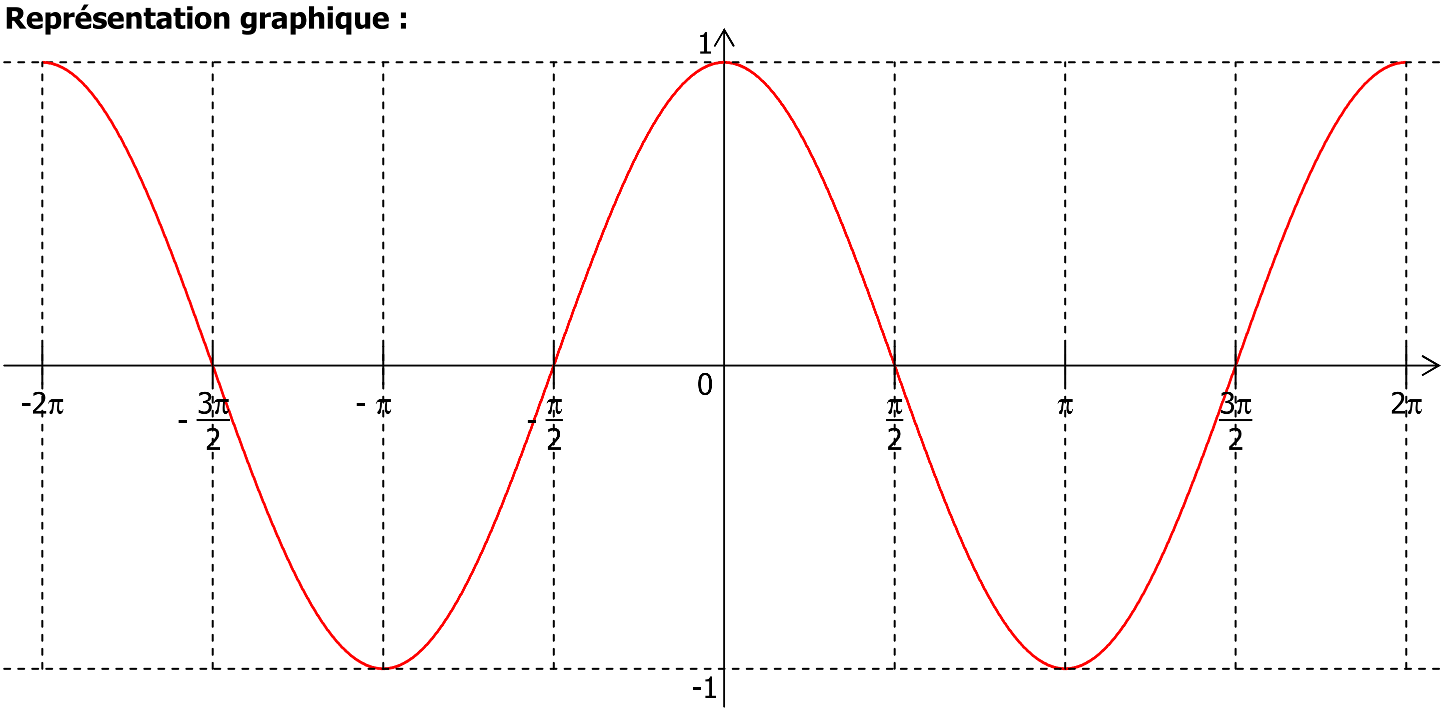
Sens de variation de la fonction cosinus sur l'intervalle $]-\pi ; \pi]$



Conclusion :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		$+\pi$
$\cos x$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

Représentation graphique :



b. La fonction sinus

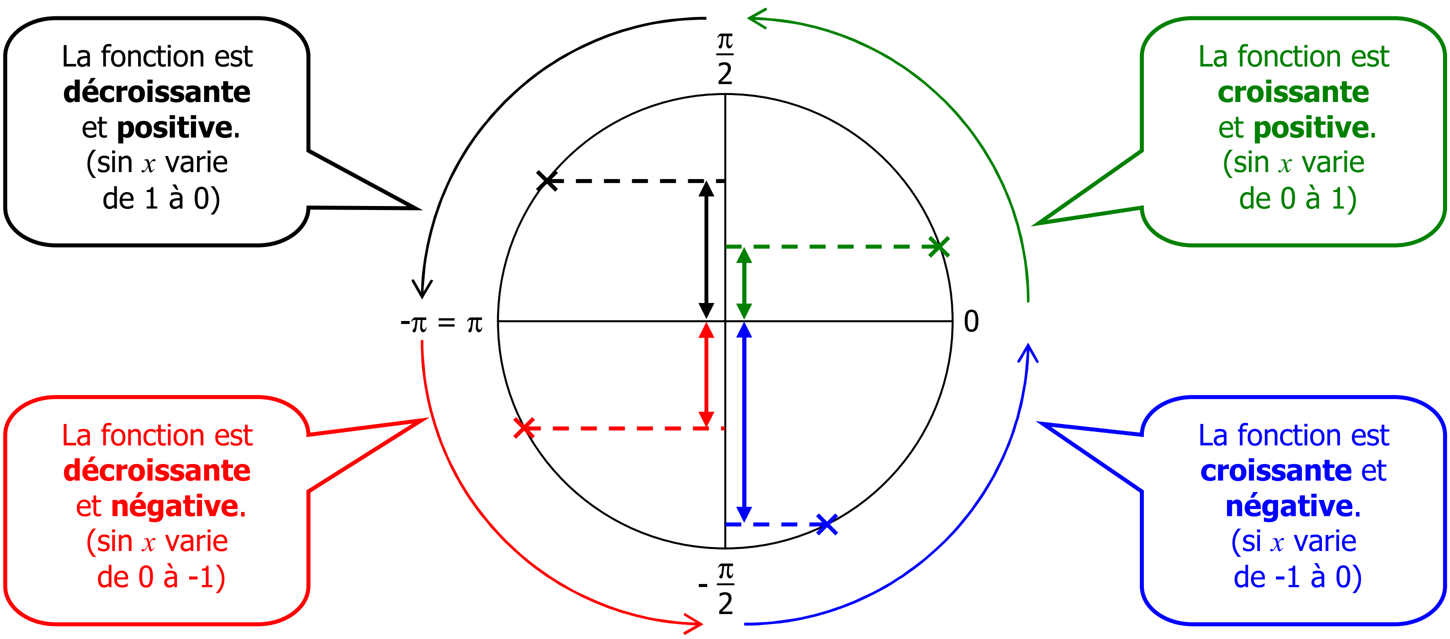
Tout nombre réel a un sinus (c'est l'ordonnée du point M associé à ce nombre sur le cercle trigonométrique).

On appelle **fonction sinus** la fonction $f : x \longmapsto \cos x$ définie sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$.

Remarque :

- Puisque pour tout x, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, on n'étudiera la fonction que sur l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$. On dit que cette fonction est **périodique**, de période 2π.
- Pour tout x, $\sin(-x) = -\sin(x)$, donc la fonction cosinus est **impaire** (la courbe est donc symétrique par rapport à l'origine du repère).

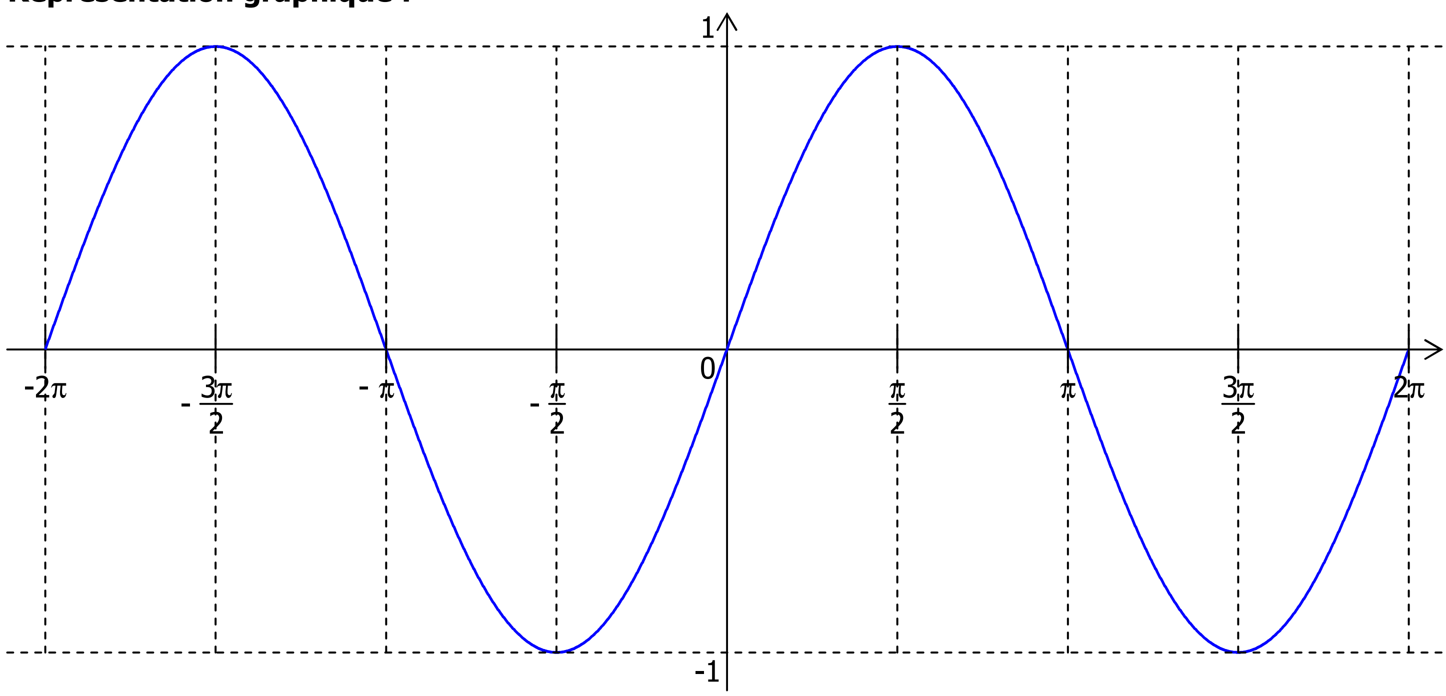
Sens de variation de la fonction sinus sur l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$



Conclusion :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		$+\pi$
$\sin x$	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0

Représentation graphique :

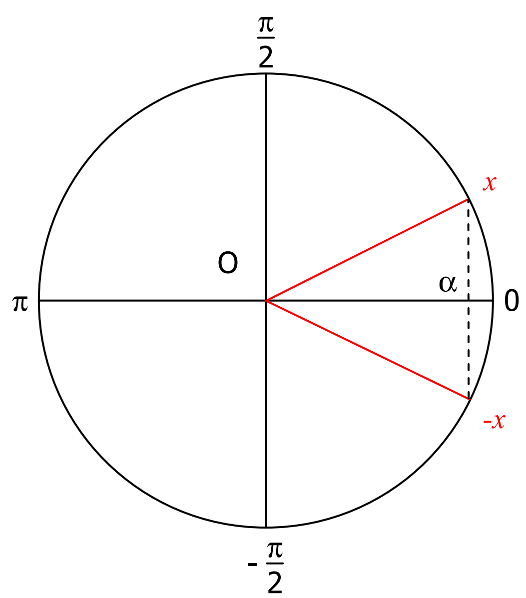


IV. EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

a. Equation du type « cos $x = \alpha$ »

Soit l'équation « cos $x = \alpha$ » avec α un réel :

$\alpha < -1$	L'équation **cos $x = \alpha$** n'admet **aucune solution**
$\alpha = -1$	L'équation **cos $x = -1$** admet pour solution tous les nombres sous la forme : $\boxed{x = \pi + k2\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$
$-1 < \alpha < 1$	L'équation **cos $x = \alpha$** admet pour solution tous les nombres sous la forme : $\boxed{x = a + k2\pi \text{ ou } x = -a + k2\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$ où a est UN nombre tel que **cos $a = \alpha$**
$\alpha = 1$	L'équation **cos $x = 1$** admet pour solution tous les nombres sous la forme : $\boxed{x = k2\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$
$\alpha > 1$	L'équation **cos $x = \alpha$** n'admet **aucune solution**



Exemple :

Résoudre sur $[-2\pi ; 2\pi]$ l'équation : $\cos x = \frac{1}{2}$

→ On sait que $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, donc les solutions de l'équation sont de la forme :

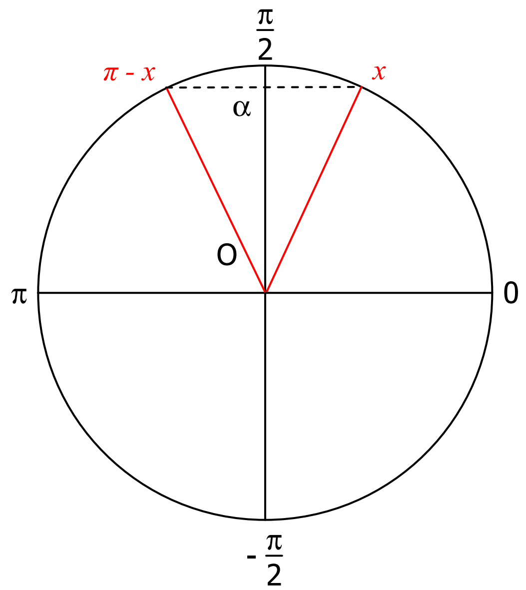
$$\boxed{x = \frac{\pi}{3} + k2\pi} \text{ ou } \boxed{x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

C'est-à-dire : … $\mathbf{\frac{-5\pi}{3}}$; $\mathbf{\frac{\pi}{3}}$; $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{13\pi}{3}$ … ou … $\frac{-7\pi}{3}$; $\mathbf{\frac{-\pi}{3}}$; $\mathbf{\frac{5\pi}{3}}$; $\frac{11\pi}{3}$ … donc $S = \{ \frac{-5\pi}{3} ; \frac{\pi}{3} ; \frac{-\pi}{3} ; \frac{5\pi}{3} \}$

b. Equation du type « sin $x = \alpha$ »

Soit l'équation « sin $x = \alpha$ » avec α un réel :

$\alpha < -1$	L'équation **sin $x = \alpha$** n'admet **aucune solution**
$\alpha = -1$	L'équation **sin $x = -1$** admet pour solution tous les nombres sous la forme : $\boxed{x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$
$-1 < \alpha < 1$	L'équation **sin $x = \alpha$** admet pour solution tous les nombres sous la forme : $\boxed{x = a + k2\pi \text{ ou } x = \pi - a + k2\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$ où a est UN nombre tel que **sin $a = \alpha$**
$\alpha = 1$	L'équation **sin $x = 1$** admet pour solution tous les nombres sous la forme : $\boxed{x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$
$\alpha > 1$	L'équation **sin $x = \alpha$** n'admet **aucune solution**



Exemple :

Résoudre sur $[-2\pi ; 2\pi]$ l'équation : sin $x = \frac{1}{2}$

→ On sait que $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, donc les solutions de l'équation sont de la forme :

$$\boxed{x = \frac{\pi}{6} + k2\pi} \text{ ou } \boxed{x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

C'est-à-dire : … $\mathbf{\frac{-11\pi}{6}}$; $\mathbf{\frac{\pi}{6}}$; $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{25\pi}{6}$ … ou … $\frac{-19\pi}{6}$; $\mathbf{\frac{-7\pi}{6}}$; $\mathbf{\frac{5\pi}{6}}$; $\frac{17\pi}{6}$ … donc $S = \{ \mathbf{\frac{-11\pi}{6} ; \frac{-7\pi}{6} ; \frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6}} \}$