EXERCICE 6B.1 - GMB 09/2010 (5 POINTS)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. a. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 + z + 1 = 0$

On notera z_1 et z_2 les solutions de cette équation, z_1 étant celle dont la partie imaginaire est négative.

b. Montrer que $z_1^2 = z_2$

2. a. On considère dans la suite de l'exercice les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \; ; \; z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \; ; \; z_3 = 1$$

Ecrire chacun de ces trois nombres sous forme trigonométrique et en déduire que $z_1^3 = z_3$.

b. Calculer z_1^{2010}

3. a. Placer les points A, B et C dans le plan. On prendra 4 cm pour unité graphique sur chaque axe.

b. Montrer que ces points sont sur un même cercle, dont on déterminera le centre et le rayon.

Dans les questions suivantes, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

4. Montrer que ABC est un triangle équilatéral.

5. Placer D tel que ABCD soit un parallélogramme, puis calculer les coordonnées de D.

6. Expliquer, sans faire de calculs, pourquoi les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires.

EXERCICE 6B.2 - GMB 06/2010 (6 POINTS)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes l'équation : $(z - 2)(z^2 - 2z + 4) = 0$

2. On considère les points A, B, C, D, E d'affixes respectives :

$z_A = 2 \qquad z_B = 1 + i\sqrt{3} \qquad z_C = \overline{z_B} \qquad z_D = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \qquad z_E = 2i\, e^{-i\frac{\pi}{3}}$

a. Donner le module et un argument de chacun des nombres complexes z_A et z_B.

b. Donner le module et un argument de z_C.

c. Donner sans calcul le module et un argument de z_D.

d. Donner la forme algébrique de z_D et z_E.

3. a. Placer les points A, B, C, D, E dans le repère. (on prendra comme unité graphique 2 cm).

Dans les questions suivantes, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

b. Montrer que les points A, B, C, D, E sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

c. Tracer le cercle dans le repère.

d. Quelle est la nature du triangle DBC ?

EXERCICE 6B.3 - GMA 06/2010 (4 POINTS)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. On note P le polynôme défini pour tout nombre complexe z par : $P(z) = z^3 - 3z^2 + 4z + 8$

a. Vérifier que $P(-1) = 0$

b. Déterminez deux nombres a et b tels que pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z + 1)(z^2 + az + b)$

c. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $P(z) = 0$.

2. On note A, B et C les points du plan, d'affixes respectives :

$$z_A = -1 \; ; \; z_B = 2 + 2i \; ; \; z_C = 2 - 2i$$

a. Placer les points A, B et C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

b. Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_A, z_B et z_C.

c. Déterminer l'aire en cm² du triangle ABC.