

**EXERCICE 5A.1 - BAC 2007**

On considère la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par :

$$f(x) = e^{2x} - e^x$$

On appelle  $f'$  la fonction dérivée de  $f$  et  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormal  $(O, I, J)$  d'unité graphique 4 cm.

On remarquera que, pour tout réel  $x$ , on a :

$$e^{2x} - e^x = e^x(e^x - 1)$$

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ . Que peut-on en déduire pour la courbe  $\mathcal{C}_f$  ?

2. a. Calculer  $f'(x)$  pour tout réel  $x$  et étudier son signe.

b. Calculer  $f(-\ln 2)$ . On détaillera les calculs.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .

3. Déterminer une équation de la tangente  $\mathcal{T}$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 0.

4. Tracer la droite  $\mathcal{T}$  et la courbe  $\mathcal{C}_f$ .

**EXERCICE 5A.2 - BAC 2008**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = e^{2x} - e^x - 6$$

On note  $f'$  sa fonction dérivée sur  $\mathbb{R}$ .

1. a. Calculer  $f'(x)$  et montrer que l'on a pour tout nombre réel  $x$  :

$$f'(x) = e^x(2e^x - 1)$$

b. Étudier les variations de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

2. a. Calculer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .

b. Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$  (on pourra mettre en facteur le nombre  $e^x$  dans l'expression de  $f(x)$ ).

3. a. Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  en précisant les limites de  $f$ .

b. Écrire le calcul qui montre que le minimum de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  est égal à  $\frac{-25}{4}$ .

c. D'après le tableau de variation de la fonction  $f$ , quel est le nombre de solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation  $(E_1)$  suivante :  $(E_1) : f(x) = 0$ .

**EXERCICE 5A.3 - BAC 2007**

Soit la fonction  $f$  définie sur l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = e^{-x} + 2x - 3.$$

Soit  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan muni d'un repère orthogonal  $(O, I, J)$  d'unités graphiques 2 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

**1. Limites aux bornes**

a. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .

b. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $-\infty$ .

On pourra établir au préalable que pour tout nombre réel  $x$ ,  $f(x) = e^{-x}(1 + 2xe^x - 3e^x)$

**2. Asymptote oblique**

a. Montrer que la droite  $(d)$  d'équation  $y = 2x - 3$  est asymptote à la courbe  $(\mathcal{C})$ .

b. Étudier la position relative de la droite  $(d)$  par rapport à la courbe  $(\mathcal{C})$ .

**3. Étude des variations de la fonction  $f$** 

a. Montrer que, pour tout nombre réel  $x$ ,

$$f'(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x}$$

où  $f'$  est la dérivée de la fonction  $f$ .

b. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation d'inconnue  $x$  :

$$f'(x) = 0$$

c. Étudier le signe de la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

d. Établir le tableau de variations de la fonction  $f$ .

e. Calculer  $f(1)$  et déterminer le signe de  $f(x)$  pour tout nombre réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0 ; 1]$ .

4. Tracer la droite  $(d)$  et la courbe  $(\mathcal{C})$  dans le repère  $(O, I, J)$ .

**EXERCICE 5A.4 - BAC 2008**

**Partie A** - On note  $g$  la fonction définie sur l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels par :

$$g(x) = e^{-x}(-3x + 1) + 1$$

1. Calculer la dérivée  $g'$  de la fonction  $g$ .

2. Étudier le sens de variation de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$ , et dresser le tableau de variation (On ne demande pas les limites de  $g$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ ).

3. Calculer  $g(\frac{4}{3})$  et en déduire le signe de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Partie B** - On considère maintenant la fonction  $f$  définie sur l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels par :

$$f(x) = e^{-x}(3x + 2) + x$$

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans le repère orthogonal  $(O, I, J)$  d'unités graphiques : 3 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée).

**1. Étude des limites.**

a. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

b. Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .

**2. Étude des variations de  $f$ .**

a. Calculer la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$ , et démontrer que, pour tout réel  $x$  :  $f'(x) = g(x)$

b. En déduire le tableau de variations de la fonction  $f$ .

3. Démontrer que la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = x$  est asymptote à la courbe  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$ , et préciser la position de la courbe  $\mathcal{C}$  par rapport à la droite  $\mathcal{D}$ . (On notera A leur point d'intersection.)

4. Déterminer l'abscisse du point B de la courbe  $\mathcal{C}$  où la tangente  $\mathcal{T}$  est parallèle à la droite  $\mathcal{D}$ .

5. Tracer, dans le repère  $(O, I, J)$ , les droites  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{T}$ . Placer les points A et B puis tracer la courbe  $\mathcal{C}$ .