PROGRAMMES	COMMENTAIRES
Fonction logarithme népérien et fonction exponentielle. Notation ln et exp. Relation fonctionnelle, dérivation, comportement asymptotique. Approximation par une fonction affine, au voisinage de 0, des fonctions $h \longmapsto \exp(h)$ et $h \longmapsto \ln(1+h)$	Le mode d'introduction des fonctions *ln* et *exp* n'est pas imposé ; l'existence et la dérivabilité de ces fonctions peuvent être admises. Hormis les deux exemples de l'exponentielle et de la racine n-ième, l'étude des fonctions réciproques n'est pas au programme.
Nombre e, notation e^x. Définition de a^b (a strictement positif, b réel). Fonctions puissances $x \longmapsto x^n$ (x réel et n entier) et $x \longmapsto x^\alpha$ (x strictement positif et α réel). Dérivation, comportement asymptotique. Cas où $\alpha = 1/n$ (n entier strictement positif) ; notation $\sqrt[n]{x}$ (x positif). Fonctions circulaires sinus, cosinus et tangente.	Selon les besoins des autres disciplines, on pourra mentionner la fonction logarithme décimal $x \longmapsto \log x$, mais aucune connaissance sur ce point n'est exigible des élèves en mathématiques. Les élèves doivent avoir une bonne pratique des représentations graphiques des fonctions étudiées dans ce paragraphe et savoir en déduire celles des fonctions directement apparentées, telles que $t \longmapsto \cos(\omega t)$, $t \longmapsto \cos(\omega t + \varphi)$, $t \longmapsto e^{at}$. Hormis les cas indiqués ici, l'étude de fonctions de la forme $x \longmapsto f(\cos(x), \sin(x))$ est hors programme.
Croissance comparée des fonctions de référence $x \longmapsto \exp x$, $x \longmapsto x^\alpha$, $x \longmapsto \ln x$ au voisinage de $+\infty$. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\exp(x)}{x^\alpha} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha \exp(-x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = +\infty$.	Ces résultats sont admis et interprétés graphiquement. Certaines études aux bornes mettent en jeu des formes indéterminées en $+\infty$ ou en $-\infty$, aucune autre connaissance que celles mentionnées ci-contre n'est exigible des élèves. L'étude des formes indéterminées en un point a est hors programme.

I. FONCTION EXPONENTIELLE

a. Définition :

On sait que pour tout $b \in]-\infty\,;+\infty[$, il existe un unique nombre a tel que $b = \ln a$.

On appelle fonction exponentielle la fonction qui à tout nombre x associe le nombre (noté « $\exp x$ » ou e^x) dont le logarithme népérien vaut x.

On dit que la fonction exponentielle est la **réciproque** de la fonction logarithme néperien.

b. Conséquences immédiates :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\ln(e^x) = x}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\boxed{e^{\ln x} = x}$
- $\ln 1 = 0$ donc $\boxed{e^0 = 1}$
- $\ln e = 1$ donc $\boxed{e^1 = e}$

II. PROPRIETES ALGEBRIQUES

Pour tous réels a et b , on a les égalités :

❶ $e^{a+b} = e^a \times e^b$ ❷ $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$ ❸ $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$ ❹ $e^{ab} = (e^a)^b$

Remarque : on retrouve exactement les propriétés déjà connues pour les puissances.

Exemples :

❶ $e^{5+x} = e^x \times e^3$

❷ $e^{x-3} = \dfrac{e^x}{e^3}$

❸ $e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$

❹ $e^{2x} = (e^2)^x = (e^x)^2$

Attention : les expressions suivantes ne peuvent pas être transformées !

$e^{a \times b}$ = idem $e^{a/b}$ = idem $e^a + e^b$ = idem $e^a - e^b$ = idem

III. ETUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

a. Ensemble de définition

La fonction ln x est définie de]0 ; +∞[vers]-∞ ; +∞[

Conséquences :

- la fonction e^{x} est définie de]-∞ ; +∞[vers]0 ; +∞[
- la fonction e^{x} est toujours positive

b. Sens de variation

On admettra que : $\boxed{(e^{x})' = e^{x}}$

Pour tout $x \in$]-∞ ; +∞[, $e^{x} > 0$ donc la fonction e^{x} est strictement croissante sur]-∞ ; +∞[

Conséquence de la croissance de e^{x} → Théorème :

Pour tous réels a et b réels :

- $a < b \iff e^{a} < e^{b}$
- $a = b \iff e^{a} = e^{b}$
- $a > b \iff e^{a} > e^{b}$

c. Limites

On va essayer de déterminer les limites aux bornes de l'intervalle d'étude, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x}$.

→ en -∞ (expérimentalement)

x	0	-1	-10	-10^{2}	-10^{3}	-10^{6}	-10^{9}
e^{x} (≈)	1	0,368	$4,5 \times 10^{-5}$	4×10^{-44}	Trop petit pour la machine		

On admettra le résultat suivant qui semble évident :

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0}$$

→ en +∞ (expérimentalement)

x	0	1	10	10^{2}	10^{3}	10^{6}	10^{9}
ln x (≈)	1	2,718	22 026	$2,7 \times 10^{43}$	Trop grand pour la machine		

On peut rendre e^{x} aussi grand qu'on veut. En effet, si je veux e^{x} > A il me suffit de prendre x > ln A.

On retiendra le résultat suivant :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty}$$

d. Valeurs remarquables

On sait que : $\boxed{e^{0} = 1}$ et $\boxed{e^{1} = e}$

Rappel : $e \approx$ 2,718 281 828

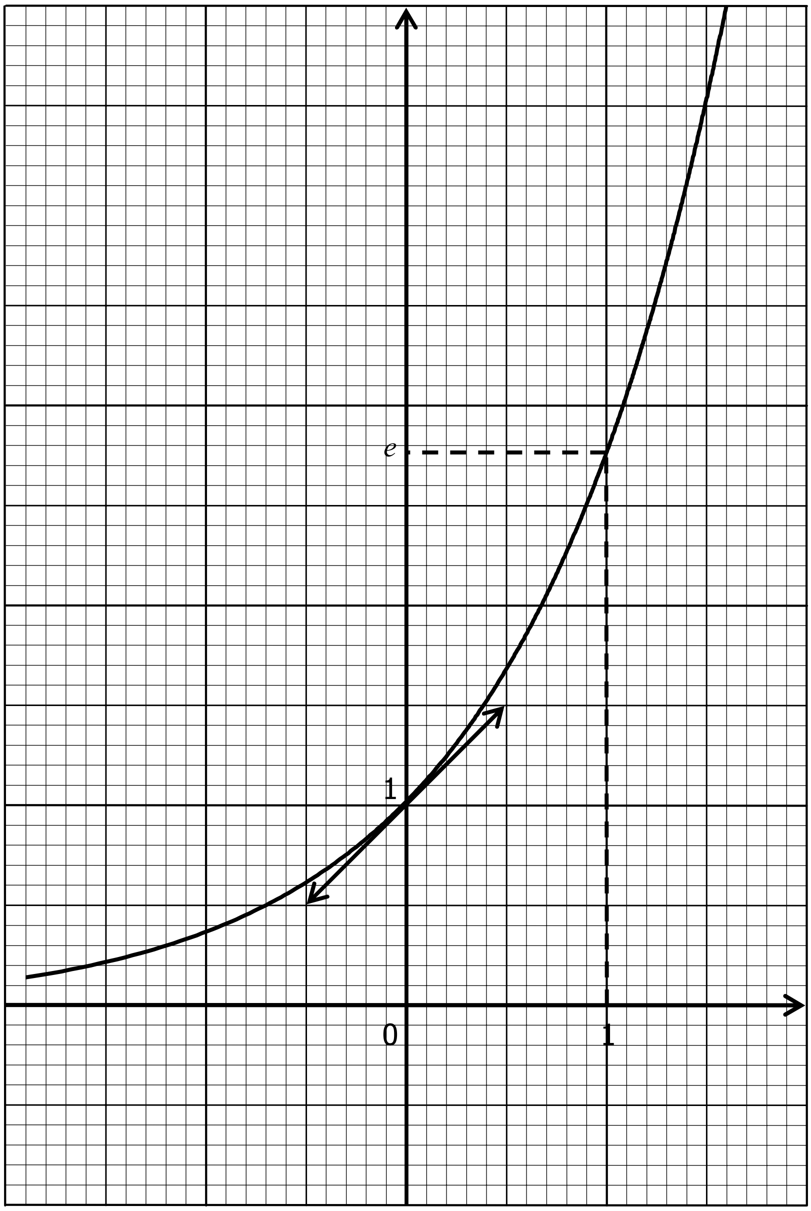
e. Tableau de variation

On résume toutes les informations précédentes dans un tableau :

x	-∞	0	1	+∞
$f'(x)$		1		+∞
$f(x)$	0	1	e	

f. Courbe représentative

Dans un repère orthonormé, on représente la courbe de f ainsi que sa tangente en 0.



IV. APPLICATIONS AUX DERIVEES ET PRIMITIVES

a. Dérivée d'une fonction composée

On rappelle la formule $(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$ ou c'est-à-dire $v[u(x)]' = u'(x) \times v'[u(x)]$

En particulier, si $v(x) = e^{x}$ on a :

$$\boxed{(e^{u})' = u' e^{u}}$$

Exemple :

Déterminer la dérivée de $f(x) = e^{2x+3}$

→ $f'(x) = 2\,e^{2x+3}$

b. Conséquence pour les primitives

Soit f une fonction définie et dérivable sur I, sous la forme $u' e^{u}$

Alors une primitive de x est : $F(x) = e^{u}$

Exemple :

Déterminer une primitive de $f(x) = x\,e^{x^2+1}$ définie et dérivable sur $]-\infty ; +\infty[$

→ On pose $u(x) = x^2 + 1$ donc $u'(x) = 2x$

$f(x) = x\,e^{x^2+1} = \dfrac{1}{2} \times 2x\,e^{x^2+1}$

donc $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2+1}$

V. CROISSANCE COMPAREE A L'INFINI

On admettra les limites suivantes pour tout n entier strictement positif :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty} \qquad \boxed{\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0}$$

VI. FONCTIONS PUISSANCES

a. Définition

On appelle fonction puissance toute fonction f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par :

$\boxed{f(x) = x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}}$, où α est un nombre réel.

b. Dérivation

La fonction f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $f(x) = x^{\alpha}$ est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ et $f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$

Démonstration :

$(x^{\alpha})' = (e^{\alpha \ln x})' = \alpha \times \frac{1}{x} \times e^{\alpha \ln x} = \alpha \times x^{-1} \times e^{\alpha \ln x} = \alpha \times e^{-\ln x} \times e^{\alpha \ln x} = \alpha \times e^{\alpha \ln x - \ln x} = \alpha \times e^{(\alpha - 1)\ln x}$

d'où: $\boxed{(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}}$

Exemple :

Soit $f(x) = x^{3/2}$, alors $f'(x) = \frac{3}{2} x^{1/2}$

c. Cas particulier où $\alpha = 1/n$

$(x^{1/n}) = e^{1/n \ln x}$ et $(x^{1/n})^n = (e^{1/n \ln x})^n = e^{n \times 1/n \ln x} = e^{\ln x} = x$

La fonction f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $f(x) = x^{1/n}$ est la fonction réciproque de la fonction g définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $g(x) = x^n$ et on note $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$

Exemple :

La réciproque de la fonction $x \longmapsto x^3$ est la fonction $x \longmapsto x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ « racine cubique de x »

Remarque :

La réciproque de la fonction $x \longmapsto x^2$ est la fonction $x \longmapsto x^{1/2}$. Or on sait aussi que réciproque de la fonction $x \longmapsto x^2$ est la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$. D'où $\boxed{\sqrt{x} = x^{1/2}}$

d. Croissances comparées à l'infini

On admettra que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^+$:

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^{\alpha}} = +\infty} \qquad \boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0}$$