EXERCICE 5A.1

Soit la fonction définie sur]0 ; +∞[par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{\ln x}{x}$$

1. a. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b. En déduire que $\mathcal{C}$, la courbe représentative de f, admet une asymptote (d) dont on précisera l'équation.

2. a. Montrer que $\mathcal{C}$, la courbe représentative de f, admet la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ pour asymptote en $+\infty$.

b. Etudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à (Δ).

3. a. Calculer la fonction dérivée de f.

b. On admet que f' est strictement positive sur]0 ; +∞[. En déduire le sens de variation de f.

4. Dans un repère orthonormé (unité : 1 cm), tracer $\mathcal{C}$, (Δ), et (d).

EXERCICE 5A.2

Soit la fonction définie sur]2 ; +∞[par :

$$f(x) = x + \ln \frac{x-2}{x+2}$$

1. a. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b. En déduire que $\mathcal{C}$, la courbe représentative de f, admet une asymptote (d) dont on précisera l'équation.

2. a. Montrer que $\mathcal{C}$, la courbe représentative de f, admet la droite (Δ) d'équation $y = x$ pour asymptote en $+\infty$.

b. Etudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à (Δ).

3. a. Calculer la fonction dérivée de f.

b. Etudier le signe de f'.

c. En déduire le sens de variation de f.

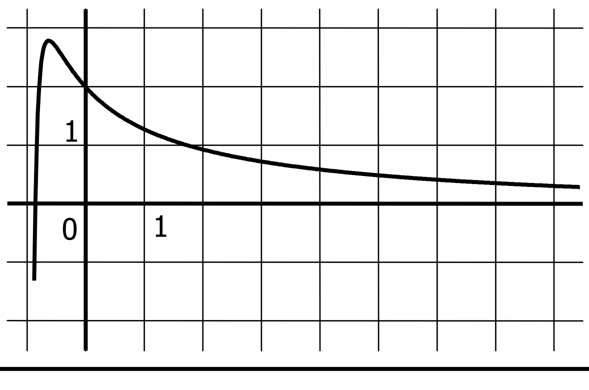
4. Dans un repère orthonormé (unité : 1 cm), tracer $\mathcal{C}$, (Δ), et (d), ainsi que la tangente à la courbe au point 4.

EXERCICE 5A.3 - BTS 2005

Soit f la fonction définie sur]-1 ; +∞[par :

$$f(x) = \frac{2 + \ln(1+x)}{1+x}$$

Sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormal est donnée ci-dessous :



1. On admet que :

$$\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$.

2. a. Démontrer que pour tout x de]-1 ; +∞[,

$$f'(x) = \frac{-1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

b. Résoudre dans l'inéquation $-1 - \ln(1+x) \geq 0$.
En déduire le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans]-1 ; +∞[.

c. Etablir le tableau de variation de f.

EXERCICE 5A.4 - BAC 2009

Partie A

Soit la fonction définie sur]0 ; +∞[par :

$$g(x) = 1 - \ln x + 2x^2$$

1. Montrer que :

$$g'(x) = \frac{(2x+1)(2x-1)}{x}$$

2. a. Etudier le signe de $g'(x)$ sur]0 ; +∞[.

b. Calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$

c. Dresser le tableau de variation de g sur]0 ; +∞[(sans les limites).

3. En déduire que pour tout x de]0 ; +∞[, $g(x)$ est strictement positif.

Partie B

Soit la fonction définie sur]0 ; +∞[par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + 2x - 3$$

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe dans le repère orthogonal (O, I, J) (unités : 2 cm en abscisses, 1 cm en ordonnées).

1. Etudier la limite de f en 0. En déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.

2. Etudier la limite de f en $+\infty$ et démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

3. Montrer que pour tout x strictement positif :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

En déduire le signe de $f'(x)$ sur]0 ; +∞[.

4. Dresser le tableau de variation de f.

5. Soit A et B les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives e et $\sqrt{e}$.

a. Donne les valeurs arrondies au centième des coordonnées de A et B.

b. En déduire que f est positive sur [e et $\sqrt{e}$].

6. Tracer la droite (Δ), la courbe $\mathcal{C}$ et placer A et B.

7. a. Démontrer qu'au point A, la courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à (Δ).

b. Le point A est-il le seul point de $\mathcal{C}$ admettant une tangente parallèle à (Δ) ?