PROGRAMMES	COMMENTAIRES
Fonction logarithme népérien et fonction exponentielle. Notation ln et exp. Relation fonctionnelle, dérivation, comportement asymptotique. Approximation par une fonction affine, au voisinage de 0, des fonctions $h \longmapsto \exp(h)$ et $h \longmapsto \ln(1+h)$	Le mode d'introduction des fonctions *ln* et *exp* n'est pas imposé ; l'existence et la dérivabilité de ces fonctions peuvent être admises. Hormis les deux exemples de l'exponentielle et de la racine n-ième, l'étude des fonctions réciproques n'est pas au programme.
Nombre e, notation e^x. Définition de a^b (a strictement positif, b réel). Fonctions puissances $x \longmapsto x^n$ (x réel et n entier) et $x \longmapsto x^\alpha$ (x strictement positif et α réel). Dérivation, comportement asymptotique. Cas où $\alpha = 1/n$ (n entier strictement positif) ; notation $\sqrt[n]{x}$ (x positif). Fonctions circulaires sinus, cosinus et tangente.	Selon les besoins des autres disciplines, on pourra mentionner la fonction logarithme décimal $x \longmapsto \log x$, mais aucune connaissance sur ce point n'est exigible des élèves en mathématiques. Les élèves doivent avoir une bonne pratique des représentations graphiques des fonctions étudiées dans ce paragraphe et savoir en déduire celles des fonctions directement apparentées, telles que $t \longmapsto \cos(\omega t)$, $t \longmapsto \cos(\omega t + \varphi)$, $t \longmapsto e^{at}$. Hormis les cas indiqués ici, l'étude de fonctions de la forme $x \longmapsto f(\cos(x), \sin(x))$ est hors programme.
Croissance comparée des fonctions de référence $x \longmapsto \exp x$, $x \longmapsto x^\alpha$, $x \longmapsto \ln x$ au voisinage de $+\infty$. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\exp(x)}{x^\alpha} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha \exp(-x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = +\infty$.	Ces résultats sont admis et interprétés graphiquement. Certaines études aux bornes mettent en jeu des formes indéterminées en $+\infty$ou en $-\infty$, aucune autre connaissance que celles mentionnées ci-contre n'est exigible des élèves. L'étude des formes indéterminées en un point a est hors programme.

I. FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

a. Définition :

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$

On appelle fonction logarithme népérien (et on note « ln ») la primitive F de f telle que F(1) = 0

b. Conséquences immédiates :

- $\ln 1 = 0$
- La fonction $x \longmapsto \ln x$ est dérivable et $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

Exemples :

❶ Déterminer la dérivée de $f(x) = 3 \ln x - x$

→ $f'(x) = 3 \times \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{3}{x} - 1$

❷ Déterminer une primitive de $g(x) = \dfrac{2 + 3x}{x} = \dfrac{2}{x} + 3 = 2 \times \dfrac{1}{x} + 3$

→ $G(x) = 2 \ln x + 3x + c$

Autre conséquence : Pour tout $x \in \,]0\,;+\infty[$, $\dfrac{1}{x} > 0$ donc la fonction ln est strictement croissante et donc :

Théorème :

Pour tous réels a et b strictement positifs :

- $a < b \Leftrightarrow \ln a < \ln b$
- $a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b$
- $a > b \Leftrightarrow \ln a > \ln b$

Exemple :

On veut résoudre l'équation $\ln(2x + 3) = \ln 5$

$\ln(2x + 3) = \ln 5$

$\Leftrightarrow \quad 2x + 3 = 5$

$\Leftrightarrow \quad 2x = 5 - 3$

$\Leftrightarrow \quad 2x = 2$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{x = 1}$

II. PROPRIETES ALGEBRIQUES

Pour tous réels a et b strictement positifs, on a les égalités :

❶ $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ ❷ $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ ❸ $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$ ❹ $\ln(a^n) = n \ln a$

Exemples :

❶ $\ln 6 = \ln(2 \times 3) = \ln 2 + \ln 3$

❷ $\ln \frac{2}{3} = \ln 2 - \ln 3$

❸ $\ln \frac{1}{2} = -\ln 2$

❹ $\ln 32 = \ln 2^5 = 5 \ln 2$

Attention : les expressions suivantes ne peuvent pas être transformées !

$\ln(a+b) =$ idem $\ln(a-b) =$ idem $\ln a \times \ln b =$ idem $\frac{\ln a}{\ln b} =$ idem

III. ETUDE DE LA FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

a. Ensemble de définition

La fonction $\ln x$ est définie sur $]0 ; +\infty[$

b. Sens de variation

On calcule la dérivée de $\ln x$: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Pour tout $x \in\ ]0 ; +\infty[$, $\frac{1}{x} > 0$ donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$

c. Limites

On va essayer de déterminer les limites aux bornes de l'intervalle d'étude, donc $\lim\limits_{x \to 0+} \ln x$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x$.

→ en 0 (expérimentalement)

x	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
$\ln x$ (≈)	0	-2,30	-4,61	-6,91	-9,21	-11,51	-13,81

Chaque fois que x est divisé par 10, $\ln x$ diminue d'environ 2,30. Il semble donc qu'on puisse rendre $\ln x$ aussi petit qu'on veut en prenant x suffisamment proche de 0 et donc on admettra le résultat suivant :

$$\boxed{\lim_{x \to 0+} \ln x = -\infty}$$

→ en $+\infty$ (expérimentalement)

x	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$\ln x$ (≈)	0	2,30	4,61	6,91	9,21	11,51	13,81

Chaque fois que x est multiplié par 10, $\ln x$ augmente d'environ 2,30. Il semble donc qu'on puisse rendre $\ln x$ aussi grand qu'on veut en prenant x suffisamment grand et donc on admettra le résultat suivant :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty}$$

d. Valeurs remarquables

- Par définition, on sait que : $\boxed{\ln 1 = 0}$
- D'autre, puisque la fonction ln est dérivable et strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$, elle prend toutes les valeurs comprises entre $-\infty$ et $+\infty$. Il existe donc un unique réel noté e tel que, en particulier :

$$\boxed{\ln e = 1}$$

Remarque : $e \approx 2,718\ 281\ 828$

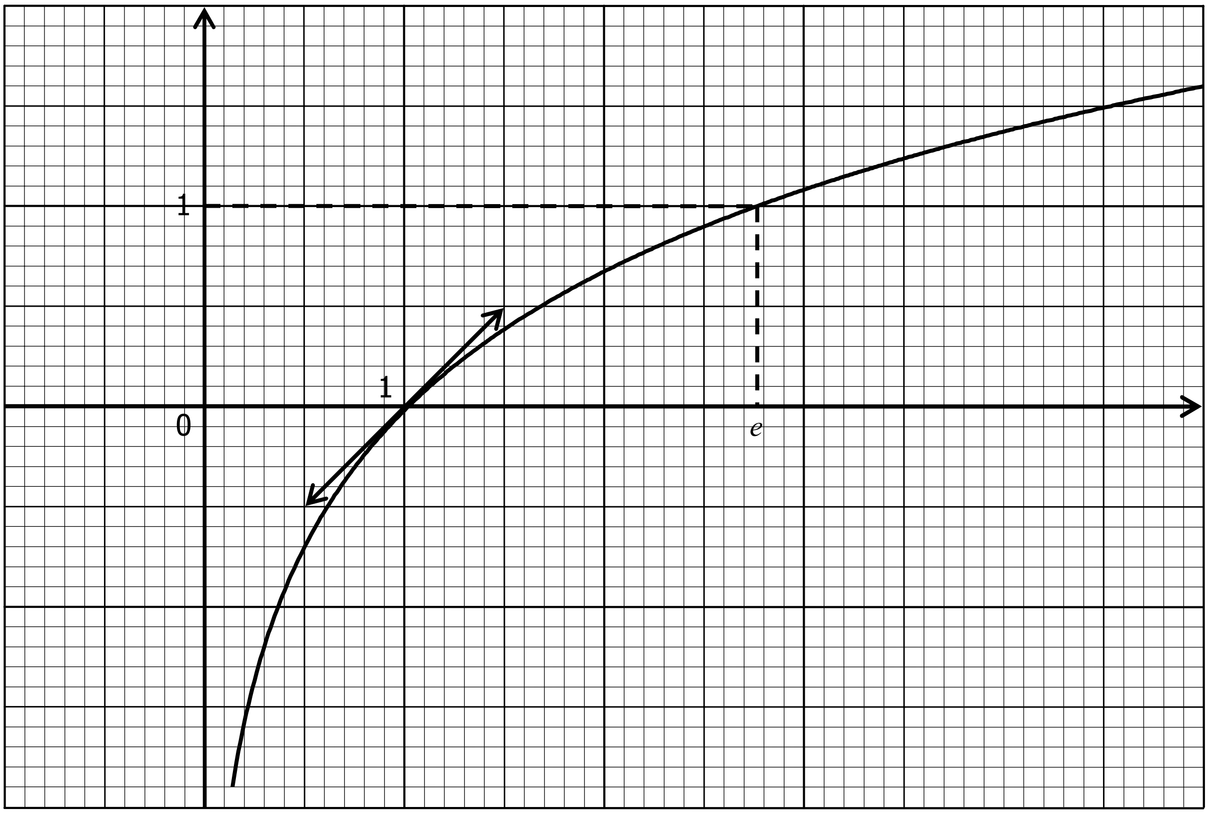
e. Tableau de variation

On résume toutes les informations précédentes dans un tableau :

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	‖	1		$+\infty$
$f(x)$	‖ $-\infty$	0	1	

f. Courbe représentative

Dans un repère orthonormé, on représente la courbe de f ainsi que sa tangente en 0.



IV. Applications aux derivees et primitives

a. Dérivée d'une fonction composée

On rappelle la formule $(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$ ou c'est-à-dire $v[u(x)]' = u'(x) \times v'[u(x)]$

En particulier, si $v(x) = \ln(x)$ on a :

$$\boxed{(\ln u)' = u' \times \frac{1}{u} = \frac{u'}{u}}$$

Exemple :

Déterminer la dérivée de $f(x) = \ln(2x^3 + x)$

→ $f'(x) = \dfrac{6x^2 + 1}{2x^3 + x}$

b. Conséquence pour les primitives

Soit f une fonction définie et dérivable sur I, sous la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Alors une primitive de x est : $F(x) = \ln|u(x)|$

Exemple :

Déterminer une primitive de $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 5}$ définie et dérivable sur $]-\infty ; +\infty[$

→ On pose $u(x) = x^2 + 5$ donc $u'(x) = 2x$
Pour tout x, $x^2 + 5 > 0$ donc $|x^2 + 5| = x^2 + 5$
donc $F(x) = \ln|x^2 + 5| = \ln x^2 + 5 + c$

V. CROISSANCE COMPAREE A L'INFINI

On admettra les limites suivantes, pour tout n entier strictement positif :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0} \qquad \boxed{\lim_{x \to 0+} x^n \ln x = 0}$$