Pour l'étude des fonctions, on s'appuiera conjointement sur les interprétations *graphiques* (y=f(x)), *cinématiques* (x=f(t)) et *électriques* (signaux relatifs à l'évolution d'une intensité, d'une différence de potentiel...).

Le programme se place dans le cadre des *fonctions définies sur un intervalle* et porte, pour l'essentiel, sur le cas des fonctions possédant dans cet intervalle des dérivées jusqu'à un ordre suffisant. Certaines situations (signaux...) mettent enjeu des fonctions définies par morceaux ; la mise en place d'un cadre théorique est exclue : l'étude sera menée intervalle par intervalle. L'intervalle de définition sera indiqué. ***Toute recherche a priori d'ensembles de définition est exclue***.

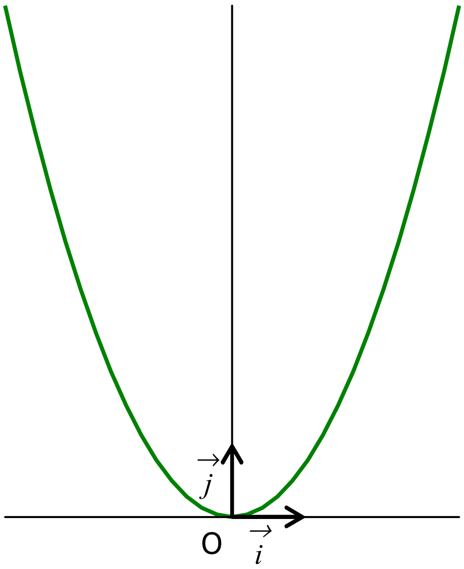
Quelques énoncés sur les *limites* figurent au programme. Ils ne constituent pas un objectif en soi, mais visent seulement à faciliter, le cas échéant, l'étude du comportement aux bornes de l'intervalle et notamment du comportement asymptotique au ; on évitera de multiplier les exemples posés *a priori* et toutes les indications nécessaires doivent être données.

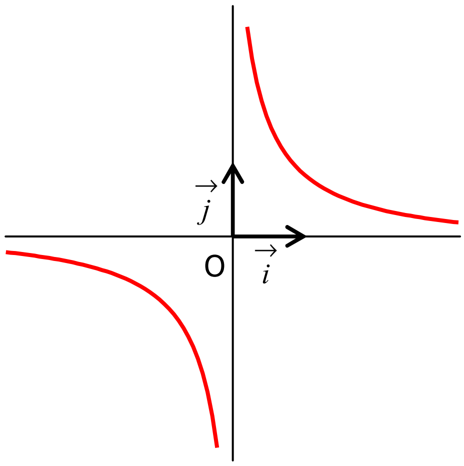
Pour la notion de limite, le point de vue adopté reste le même qu'en première ; les définitions (ε,α) ou (ε,A) sont hors programme. ***La continuité en un point et la continuité sur un intervalle sont hors programme.***

PROGRAMMES	COMMENTAIRES
a. Langage des limites Les fonctions étudiées dans ce paragraphe sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.	Les notions et les énoncés de ce paragraphe sont introduits à l'aide d'une approche numérique et graphique ; ils ne feront l'objet d'aucun développement théorique.
α) Introduction de la notation $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ Notion d'asymptote verticale.	Lorsque *a* appartient à I, on s'appuiera sur le $\lim\limits_{h \to 0}$ g(h) abordé en première. On convient que $\lim\limits_{x \to a}$ f(x) = f(a)
Dire que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ signifie que $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = L$	On soulignera le fait que, par translation, l'étude d'une fonction $x \longmapsto f(x)$ au point a se ramène à l'étude de la fonction $h \longmapsto f(a+h)$ au point 0.
β) Limite en $+\infty$ des fonctions : $x \longmapsto x$, $x \longmapsto x^2$, $x \longmapsto x^3$, $x \longmapsto \sqrt{x}$ Limite en $+\infty$ des fonctions : $x \longmapsto \frac{1}{x}$, $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$, $x \longmapsto \frac{1}{x^3}$, $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ Introduction des notations $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ Notion d'asymptote horizontale.	Pour cette introduction, on s'appuiera sur des expérimentations numériques et graphiques portant notamment sur les fonctions de référence ci-contre. Pour donner une idée du cas général, on peut dire, par exemple, que $f(x)$ est supérieur à 10, 10^2 , ..., 10^9 , 10^p , dès que x est assez grand.
γ) Dans le cas d'une limite finie L, dire que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ signifie aussi que $\lim\limits_{x \to a} \lvert f(x) - L \rvert = 0$ ou encore f(x) = F + φ(x) où $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = 0.$	On dispose d'un énoncé analogue pour les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
b. Enoncés usuels sur les limites ***Opérations graphiques*** Limite de la somme de deux fonctions, du produit d'une fonction par une constante, du produit de deux fonctions, du quotient de deux fonctions.	Ces énoncés doivent couvrir d'une part le cas des limites finies, d'autre part celui des limites infinies. Il n'y a pas lieu de s'attarder à leur étude et d'en donner une liste complète. Toute règle relative à des cas d'indétermination est hors programme. Les énoncés de ce paragraphe sont introduits dans *l'unique but de faciliter l'étude des questions figurant au programme* (dérivées, comportements asymptotiques) *et non pour faire l'objet d'un entraînement systématique à la recherche de limites.* En particulier, en dehors du contexte de la dérivation, la recherche de limites en un point *a* de I *n'est pas un objet du programme*, et, pour les comportements asymptotiques, les travaux ne doivent porter que sur quelques exemples très simples.
Comparaison → Si pour x assez grand, $f(x) \geq u(x)$, et si $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$, Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ → Si pour x assez grand, $\lvert f(x) - L \rvert \leq u(x)$, et si $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 0$, Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$. → Si pour x assez grand, $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$, et si $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = L$ Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.	
Compatibilité avec l'ordre → Si pour x assez grand, $f(x) \leq g(x)$, et si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = L'$ Alors $L \leq L'$	De manière générale, dans la plupart des situations de majorations et d'encadrements intervenant dans le programme d'analyse, les inégalités larges suffisent ; les inégalités strictes doivent être réservées au cas où elles sont indispensables.
Limite d'une fonction composée → Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y \to b} g(y) = L$ Alors $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = L$	Bien entendu, cet énoncé, condensé pour faciliter la mémorisation, recouvre plusieurs cas qu'il convient de distinguer clairement et d'illustrer à l'aide d'exemples. En dehors des cas du type $x \longmapsto g(ax+b)$, $\exp u$, $\ln u$ *et* u^α et les fonctions *f* et *g* doivent être indiquées.

I. NOTION DE LIMITE

On connaît la **fonction carré** et la **fonction inverse**, dont les courbes sont les suivantes :





Nous sommes capables de les représenter dans un repère… partiellement. En effet, que ce passe-t-il quand x devient très grand pour la fonction carré ? Que ce passe-t-il quand x est très proche de 0 pour la fonction inverse ?

Dans la mesure où l'on ne peut pas calculer le carré de +∞ (qui n'est pas un nombre) ni l'inverse de zéro (valeur interdite), on va étudier ce qu'il se passe quand « x tend vers +∞ » ou quand « x tend vers 0 ». C'est ce que l'on appellera l'étude des « **limites** » de la fonction.

II. LIMITES DES FONTIONS USUELLES

a. Etude (expérimentale) de quelques limites en +∞

On va calculer les valeurs de différentes fonctions quand x devient de plus en plus grand

x	x^2	x^3	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$
10	100	1000	≈	≈	0,1	0,01	0,001
10^2	10^4	10^6	10	0,1	0,01	10^{-4}	10^{-6}
10^3	10^6	10^9	≈	≈	0,001	10^{-6}	10^{-9}
10^{10}	10^{20}	10^{30}	10^5	10^{-5}	10^{-10}	10^{-20}	10^{-30}

On en déduit les limites suivantes, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

b. Etude (expérimentale) de quelques limites en -∞

On va calculer les valeurs de différentes fonctions quand x devient de plus en plus petit

x	x^2	x^3	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$
-10	100	-1000	-0,1	0,01	-0,001
-10^2	10^4	-10^6	-0,01	10^{-4}	-10^{-6}
-10^3	10^6	-10^9	-0,001	10^{-6}	-10^{-9}
-10^{10}	10^{20}	-10^{30}	-10^{-10}	10^{-20}	-10^{-30}

On en déduit les limites suivantes, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

si n est pair **si n est impair**

c. Etude (expérimentale) de quelques limites en 0

On va calculer les valeurs de différentes fonctions quand x devient de plus en plus proche de 0.

x	x^2	x^3	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$
-10^{-1}	0,01	-0,001	-10	100	-1000
-10^{-2}	10^{-4}	-10^{-6}	-10^{2}	10^{4}	-10^{6}
-10^{-10}	10^{-20}	-10^{-30}	-10^{10}	10^{20}	-10^{30}
0	0	0	n'existe pas	n'existe pas	n'existe pas
10^{-10}	10^{-20}	10^{-30}	10^{10}	10^{20}	10^{30}
10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{2}	10^{4}	10^{6}
10^{-1}	0,01	0,001	10	100	1000

On en déduit les limites suivantes, pour tout $n \in \mathbb{N}$

On distinguera $\mathbf{0^+}$ ($x \to 0$ avec $x>0$) et $\mathbf{0^-}$ ($x \to 0$ avec $x<0$)

$$\lim_{x \to 0} x^n = 0 \qquad \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x^n} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0-} \frac{1}{x^n} = +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \qquad \lim_{x \to 0-} \frac{1}{x^n} = -\infty \text{ si } n \text{ est impair}$$

d. Limite quand x tend vers a appartenant à I

Théorème :

Si f est définie sur un intervalle I contenant a, alors $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$

Exemple :

Soit f définie sur]-2 ; +∞[par $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ et on veut déterminer $\lim_{x \to 2} f(x)$

$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 3\times 2^2 - 2 \times 2 + 1 = 12 - 4 + 1 = 9$

e. Limite quand x tend vers a, borne de I

Propriété :

Dire que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ revient à dire que $\lim_{h \to 0} f(a+h) = L$

Méthode :

1. Poser $x = a + h$
2. Remplacer x dans l'expression de $f(x)$
3. Etudier la limite de $f(a+h)$ quand h tend vers 0

Exemple :

Soit f définie sur]-2 ; +∞[par $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ et on veut déterminer $\lim_{x \to 2} f(x)$

1. On pose $x = 2 + h$
2. Alors $f(x) = \dfrac{1}{2+h-2} = \dfrac{1}{h}$
3. Dans ce cas $\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{h \to 0+} \dfrac{1}{h} = +\infty$

III. OPERATIONS SUR LES LIMITES

Dans toutes ces propriétés, on ne précisera pas s'il s'agit de limites en a, $\lim f = +\infty$ et ou $-\infty$ car elles s'appliquent dans tous les cas.

a. Produit d'une fonction par un réel constant

Soit f une fonction définie sur I et k un réel. La limite de la fonction $k.f$ est donnée par le tableau :

lim f	$L \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
k	$k \neq 0$	$k > 0$	$k < 0$	$k > 0$	$k < 0$
lim $k.f$	kL	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Exemple :
On veut déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} -5x^2$

→ $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} -5x^2 = -\infty$

b. Somme de deux fonctions

Soit f et g deux fonctions définies sur I. La limite de la fonction $f + g$ est donnée par le tableau :

lim f	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
lim g	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
lim $f + g$	L + L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**???**

Exemple :
On veut déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + x^2$

→ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + x^2 = +\infty$

Attention : Il n'existe pas de règle générale si $\lim f = +\infty$ et $\lim g = -\infty$. On dit dans ce cas que $\lim f + g$ est une **forme indéterminée**. Il faudra donc étudier ce type de fonction au cas par cas.

c. Produit de deux fonctions

Soit f et g deux fonctions définies sur I. La limite de la fonction $f \times g$ est donnée par le tableau :

lim f	L	L > 0	L < 0	L > 0	L < 0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**0**
lim g	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
lim $f \times g$	$L \times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**???**

Exemple :
On veut déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2(1 + x)$

→ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} 1 + x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \end{array}\right\}$ donc $x^2(1 + x) = +\infty$

Attention : Il n'existe pas de règle générale si $\lim f = 0$ et $\lim g = \pm\infty$. On dit dans ce cas que $\lim f \times g$ est une **forme indéterminée**. Il faudra donc étudier ce type de fonction au cas par cas.

d. Inverse d'une fonction

Soit f une fonction définie sur I. La limite de la fonction $\frac{1}{f}$ est donnée par le tableau :

$\lim f$	$L \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{1}{f}$	$\frac{1}{L}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-

Exemple :

On veut déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{5x^2}$

→ $\lim\limits_{x \to -\infty} 5x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{5x^2} = 0$

e. Quotient de deux fonctions

$\lim f$	L	$L \neq 0$	$L \neq 0$	0	0	**0**	∞	∞	∞
$\lim g$	$L' \neq 0$	0	∞	$L' \neq 0$	∞	**0**	$L' \neq 0$	0	∞
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{L}{L'}$	∞ (+R.S.)	0 (+R.S.)	0	0	**???**	∞ (+R.S.)	∞ (+R.S.)	**???**

Exemple :

On veut déterminer $\lim\limits_{x \to 2+} \frac{x^2}{x-2}$

→ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2+} x^2 = 4 \\ \lim\limits_{x \to 2+} x-2 = 0^+ \end{array}\right\}$ donc $\frac{x^2}{x-2} = +\infty$

Attention : Il n'existe pas de règle générale si $\lim f = \lim g = 0$ et $\lim f = \lim g = \pm\infty$. On dit dans ce cas que $\lim \frac{f}{g}$ est une **forme indéterminée**. Il faudra donc étudier ce type de fonction au cas par cas.

f. Cas particulier d'un polynôme ou d'une fonction rationnelle

Méthode : pour étudier la limite d'un polynôme quand x tend vers $\pm\infty$, on met en facteur le terme de plus haut degré.

Exemple : On veut déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 - 5x^2 + x - 7$

→ $2x^3 - 5x^2 + x - 7 = x^3(2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{7}{x^3})$

→ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{7}{x^3} = 2 \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 - 5x^2 + x - 7 = +\infty$

Méthode : pour étudier la limite d'une fonction rationnelle quand x tend vers $\pm\infty$, on met en facteur le terme de plus haut degré dans le numérateur et le dénominateur, puis on simplifie.

Exemple : On veut déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 - 5x^2 + x - 7}{5x^2 + 2x - 5}$

→ $2x^3 - 5x^2 + x - 7 = x^3(2 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{7}{x^3})$

→ $5x^2 + 2x - 5 = x^2(5 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{5}{x^2})$

donc $\dfrac{2x^3 - 5x^2 + x - 7}{5x^2 + 2x - 5} = \dfrac{x^3(2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{7}{x^3})}{x^2(5 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2})} = \dfrac{x(2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{7}{x^3})}{5 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}}$

→ $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{7}{x^3}}{5 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}} = \dfrac{2}{5} \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 - 5x^2 + x - 7}{5x^2 + 2x - 5} = +\infty$

g. Limite d'une fonction composée

Théorème : Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y \to b} g(u) = L$ alors $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = L$

Exemple : On veut déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{3 + \dfrac{1}{x}}$

→ $\lim\limits_{x \to +\infty} 3 + \dfrac{1}{x} = 3$

On pose $u = 3 + \dfrac{1}{x}$.

→ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{3 + \dfrac{1}{x}} = \lim\limits_{u \to 3} \sqrt{u} = \sqrt{3}$

IV. LIMITES ET COMPARAISONS

Théorèmes :

- Si pour x assez grand, $f(x) \geq u(x)$, et si $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- Si pour x assez grand, $|f(x) - L| \leq u(x)$, et si $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.
- Si pour x assez grand, $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$, et si $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = L$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

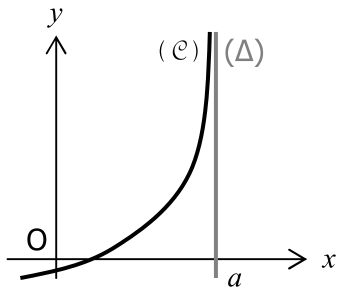
Exemple :

Soit la fonction définie sur]0 ; +∞[par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

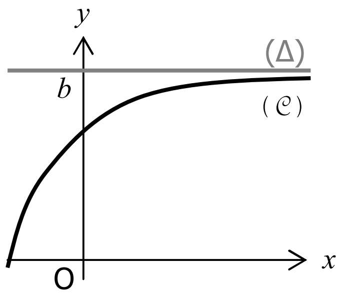
V. INTERPRETATION GRAPHIQUE : ASYMPTOTES

Il existe 3 types d'asymptotes :

- Si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, alors la droite (Δ) d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe $(\mathcal{C})$ représentant f.



- Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$ ou $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$, alors la droite (Δ) d'équation $y = b$ est une **asymptote horizontale** à la courbe $(\mathcal{C})$ représentant f.



- Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ ou $\lim_{x \to -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$, alors la droite (Δ) d'équation $y = ax + b$ est une **asymptote oblique** à la courbe $(\mathcal{C})$ représentant f.
  [L'étude du signe de $f(x) - (ax + b)$ permet de déterminer la position de la courbe par rapport à son asymptote]