

CONTENUS	COMPÉTENCES EXIGIBLES	COMMENTAIRES
<b>Nombres entiers et rationnels</b> Diviseurs communs à deux entiers Fractions irréductibles	Déterminer si deux entiers donnés sont premiers entre eux. Savoir qu'une fraction est dite irréductible si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux. Simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible.	Cette partie d'arithmétique permet une première synthèse sur les nombres, intéressantes tant du point de vue de l'histoire des mathématiques que pour la culture générale des élèves. Depuis la classe de cinquième, les élèves ont pris l'habitude de simplifier les écritures fractionnaires : la factorisation du numérateur et du dénominateur se fait grâce aux critères de divisibilité et à la pratique du calcul mental. Reste à savoir si la fraction obtenue est irréductible ou non. On remarque que la somme et la différence de deux multiples d'un nombre entier sont eux-mêmes multiples de cet entier. On construit alors un algorithme, celui d'Euclide ou un autre, qui, donnant le PGCD de deux nombres entiers, permet de répondre à la question dans tous les cas. Les activités proposées ne nécessitent donc pas le recours aux nombres premiers. Les tableurs et les logiciels de calcul formel peuvent, sur ce sujet, être exploités avec profit. A côté des nombres rationnels, on rencontre au collège des nombres irrationnels comme $\pi$ et $\sqrt{2}$ . On pourra éventuellement démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$ . Une telle étude peut également être mise à profit pour bien distinguer le calcul exact et le calcul approché.

## I. NOMBRES ENTIERS ET RATIONNELS

Les nombres entiers sont les nombres qui peuvent s'écrire sans virgule.

**Exemples :**  $5$  ;  $\sqrt{4}$  ;  $\frac{6}{3}$  sont des nombres entiers.

Les nombres décimaux les nombres qui peuvent s'écrire avec un nombre fini de chiffres derrière la virgule.

**Exemples :**  $6,7$  ;  $\frac{354}{1\ 000}$  ;  $\frac{3}{2}$  sont des nombres décimaux.

Les nombres rationnels les nombres qui peuvent s'écrire comme un quotient de deux entiers.

**Exemples :**  $\frac{1}{3}$  et  $\frac{5}{7}$  sont des nombres rationnels.

**ATTENTION :** Certains nombres n'entrent dans aucune de ces catégories. On dit qu'ils sont irrationnels.

**Exemples :**  $\sqrt{2}$  et  $\pi$  sont des nombres irrationnels.

## II. DIVISEURS COMMUNS À DEUX NOMBRES ENTIERS.

### a. Division euclidienne :

On appelle **DIVISION EUCLIDIENNE** la division (vue à l'école primaire) dans laquelle le **dividende**, le **diviseur** et le **quotient** et le **reste** sont des nombres entiers.

$$\begin{array}{r}
 \text{a : dividende} \quad 86 \quad | \quad 3 \\
 \underline{6} \phantom{0} \\
 26 \phantom{0} \\
 \underline{24} \\
 2
 \end{array}$$

b : diviseur  
q : quotient  
r : reste

Cette division se résume à l'égalité suivante :

$$86 - 3 \times 28 = 2$$

« Dans 86, il y a 3 fois le nombre 28, et il reste 2 »

En règle générale :

$$a - bq = r$$

« Dans **a**, il y a **q** fois le nombre **b**, et il reste **r** »

**Exemple (à la machine) :**

On calcule le **quotient** :  $785 : 13 \approx 60,3846\dots$  Donc le quotient **q = 60**.

On calcule le **reste** :  $785 - 13 \times 60 = 5$ . Donc le reste **r = 5**.

**b. Diviseurs d'un nombre entier (Exemple) :**

a et b sont deux nombres entiers.

On dit que b est un diviseur de a quand le reste de la division de a par b est nul (autrement dit, le quotient qu'on obtient en calculant  $a : b$  à la machine est entier)

**Exemple :**

2, 3, 4 et 6 sont des diviseurs de 12 :

$$12 : 2 = 6$$

$$12 : 3 = 4$$

$$12 : 4 = 3$$

$$12 : 6 = 2$$

1 et 12 sont également des diviseurs de 12 car :

$$12 : 1 = 12$$

$$12 : 12 = 1$$

Par contre, 5 et 7 ne sont pas des diviseurs de 12 :

$$12 : 5 = 2,4$$

$$12 : 7 \approx 1,714285714\dots$$

Les diviseurs de 12 sont donc : 1, 2, 3, 4, 6 et 12 sont les diviseurs de 12.

**c. Diviseurs communs à deux nombres entiers (Exemple) :**

1, 2, 3, 4, 6 et 12 sont les diviseurs de 12.

1, 2, 3, 6, 9 et 18 sont les diviseurs de 18.

Alors 1, 2, 3 et 6 sont les diviseurs communs à 12 et 18.

**d. PGCD :**

On appelle PGCD le Plus Grand Diviseur Commun (ou « Commun Diviseur ») à deux nombres entiers.

Le PGCD de 12 et 18 est ... 6.

**III. FRACTIONS IRRÉDUCTIBLES.****a. Nombres premiers entre eux :**

On dit que deux nombres sont **premiers entre eux** quand ils ont pour unique diviseur commun 1.

Cela revient à dire que leur PGCD est 1.

**Exemple :**

15 a pour diviseurs : 1, 3, 5 et 15.

22 a pour diviseurs : 1, 2, 11 et 22.

L'unique diviseur commun à ces deux nombres est 1. Ils sont donc premiers entre eux.

**b. Fraction irréductible :**

Une fraction est dite irréductible si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

**Exemples :**

$\frac{22}{15}$  est une fraction irréductible.

Par contre,  $\frac{12}{18}$  est « réductible ».

En effet  $\frac{12}{18} = \frac{12 : 6}{18 : 6} = \frac{2}{3}$ .

En simplifiant par le PGCD des deux nombres, on obtient une nouvelle fraction qui, elle, est irréductible.