| CONTENUS | CAPACITES ATTENDUES | COMMENTAIRES |
|---|---|---|
| Forme algébrique : somme, produit, quotient, conjugué. | Effectuer des calculs algébriques avec des nombres complexes. | Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ |
| Représentation géométrique. Affixe d'un point, d'un vecteur. | Représenter un nombre complexe par un point ou un vecteur.<br>Déterminer l'affixe d'un point ou d'un vecteur. | |
| Forme trigonométrique : module et argument. Interprétation géométrique. | Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement. | On n'effectue pas d'opération sur les nombres complexes à partir de la forme trigonométrique. |

# I. NOMBRES COMPLEXES

## a. Le nombre « $i$ »

Il existe un nombre, noté $i$, qui a la propriété suivante : $\boxed{i^2 = -1}$

## b. Forme algébrique d'un nombre complexe

On appelle **nombre complexe** tout nombre sous la forme $a + bi$ où $a$ et $b$ sont deux nombres réels.
Cette écriture est appelée **forme algébrique** du nombre complexe.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe.
Le nombre $a$ est appelé **partie réelle** de $z$, et noté Re($z$)
Le nombre $b$ est appelé **partie imaginaire** de $z$, et noté Im($z$)

**Exemple :**
$z = 3 + 4i$ est un nombre complexe. Re($z$) = 3 et Im($z$) = 4

**Remarques :**
- La partie imaginaire d'un nombre complexe est un nombre réel.
- Si Im($z$) = 0, alors $z$ est un nombre réel.
- Si Re($z$) = 0, $z$ est un **imaginaire pur**.
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

## c. Egalité de deux nombres complexes

Soit $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$ deux nombres complexes.

$$\boxed{z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}}$$

## d. Addition des nombres complexes

Soit $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$ deux nombres complexes.

$$\boxed{z + z' = (a + a') + (b + b')i}$$

**Exemple :**
Soit $z = 4 + 3i$ et $z' = -2 + 5i$
$z + z' = (4 + 3i) + (-2 + 5i) = (4 - 2) + (3 + 5)i = 2 + 8i$

## e. Mutiplication de nombres complexes

Soit $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$ deux nombres complexes.

$$\boxed{z \times z' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i}$$

**Exemple :**
Soit $z = 4 + 3i$ et $z' = -2 + 5i$
$z \times z' = (4 + 3i)(-2 + 5i) = 4 \times (-2) + 4 \times 5i + 3i \times (-2) + 3i \times 5i = -8 + 20i - 6i - 15 = -23 + 14i$

**f. conjugué**

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe. On appelle **conjugué de** $z$ le nombre $\boldsymbol{a - bi}$ noté $\overline{z}$.

**Exemple :**

Le conjugué de 4 + 3$i$ est 4 – 3$i$.

**Propriétés :**

$\boxed{\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}}$ $\boxed{\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}}$ $\boxed{z \times \overline{z} = a^2 + b^2}$

**g. Inverse**

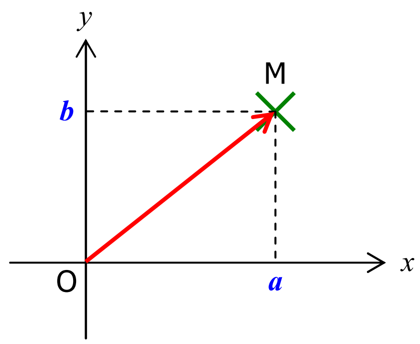
Soit $z = a + bi$ un nombre complexe.

L'inverse de $z$ est le nombre $\boxed{\dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}i}$

**II. GEOMETRIE ET NOMBRES COMPLEXES**

Dans un repère **orthonormal**, on dit que :

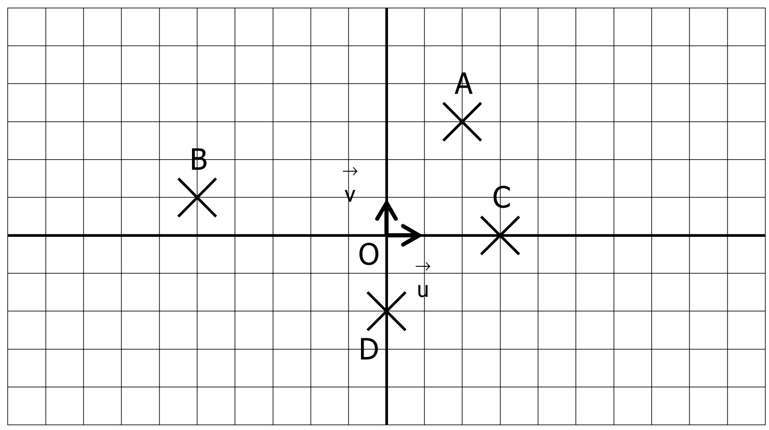
- le nombre $z = a + bi$ est **l'affixe** du point M($a$ ; $b$) ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
- le point M est **l'image** du nombre $z = a + bi$.
- le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est **le vecteur image** du nombre $z = a + bi$.




$a$ = Re($z$) est l'**abscisse** de M $b$ = Im($z$) est l'**ordonnée** de M

**Exemple :**

Placer dans le repère les points A (2 + 3$i$), B (-5 + $i$), C (3) et D (-2$i$) :



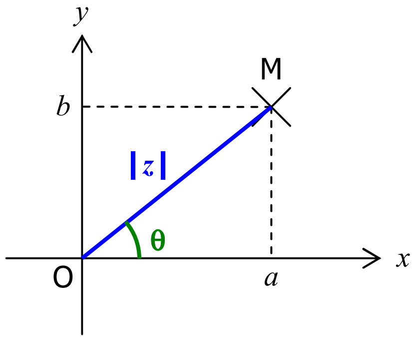

**Remarques :**

- pour éviter les confusions, le repère ne s'appellera plus (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) mais (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$)
- le plan muni de ce repère est appelé **plan complexe**.
- tout nombre réel aura son image sur l'axe des abscisses désormais appelé « **axe des réels** »
- tout nombre imaginaire pur aura son image sur l'axe des ordonnées désormais appelé « **axe des imaginaires** »

## III. FORME TRIGONOMETRIQUE

### a. Module et argument

Soit M le point du plan complexe qui a pour affixe $z = a + bi$.

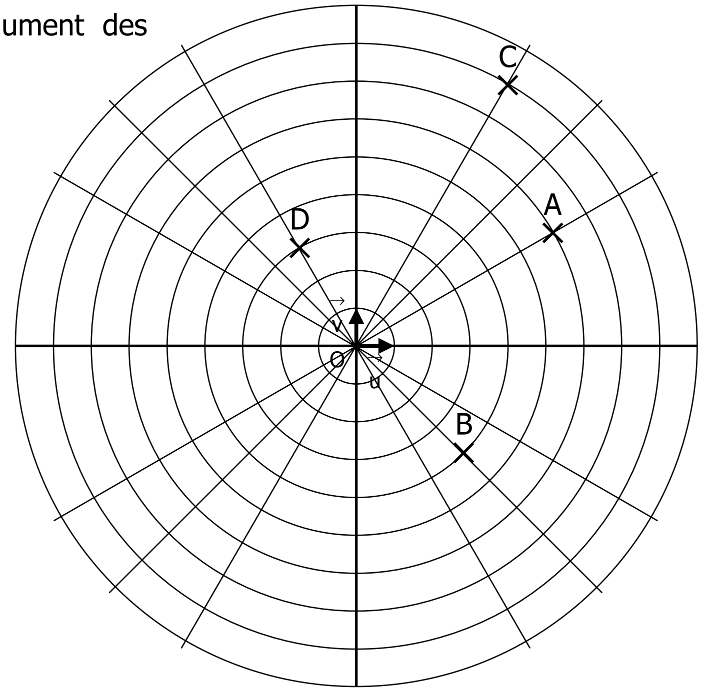



On appelle **module de $z$** et on note $|z|$ le nombre $|z| = OM = \|\overrightarrow{OM}\|$

On appelle **argument de $z$** (non nul) et on note **arg($z$)** tout nombre de la forme $\theta + k2\pi$ où $\theta$ est une mesure de l'angle orienté $\widehat{xOM}$.

**Exemple :**

Lire sur le dessin le module et l'argument des affixes de A, B, C et D :




A : Module = 5

Argument = $\dfrac{\pi}{6}$

B : Module = 4

Argument = $-\dfrac{\pi}{4}$

C : Module = 7

Argument = $\dfrac{\pi}{3}$

D : Module = 3

Argument = $\dfrac{2\pi}{3}$

### b. Calcul du module

Soit M le point du plan complexe qui a pour affixe $z = a + bi$.

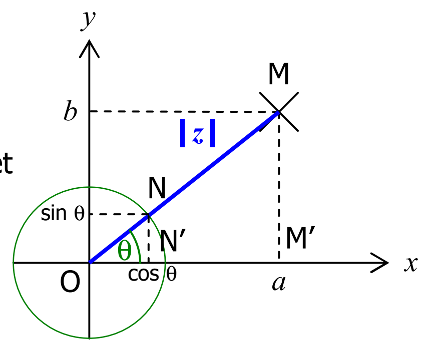
D'après le théorème de Pythagore (voir figure du **a.**) : $|z|^2 = a^2 + b^2 = z\,\overline{z}$ d'où :

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\,\overline{z}}}$$

### c. Détermination de l'argument

Soit M le point du plan complexe qui a pour affixe $z = a + bi$.

Soit N le point du cercle trigonométrique qui a le même argument ($\theta$) que $z$.




L'affixe de N est $z' = \cos\theta + i\sin\theta$

D'après le théorème de Thalès dans le triangle OMM', où les droites (MM') et (NN') sont parallèles :

$$\frac{ON}{OM} = \frac{ON'}{OM'} = \frac{NN'}{MM'} \Leftrightarrow \frac{1}{|z|} = \frac{\cos\theta}{a} = \frac{\sin\theta}{b}$$

d'où les formules qui permettent de déterminer $\theta$ :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin\theta = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

## d. Forme trigonométrique

On appelle **forme trigonométrique de** $z$ la notation $[\rho\ ;\ \theta]$ où $\begin{cases} \rho \text{ est le module de } z \\ \theta \text{ est l'argument de } z \end{cases}$

**Exemples simples :**

La forme trigonométrique de 1 est $[1\ ;\ 0]$

La forme trigonométrique de $i$ est $[1\ ;\ \frac{\pi}{2}]$

**Propriétés :**

Pour tout nombre complexe, on peut passer d'une forme à une autre en utilisant les formules :

$\boxed{|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \rho}$ $\boxed{\cos\theta = \frac{a}{|z|}}$ $\boxed{\sin\theta = \frac{b}{|z|}}$ $\boxed{a = \rho.\cos\theta}$ $\boxed{b = \rho.\sin\theta}$

**Exemple 1 :**

Soit $z$ un nombre complexe dont la forme algébrique est $z = -1 + i\sqrt{3}$

$|z] = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{-1}{|z|} = \frac{-1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ et on reconnaît là des valeurs remarquables du sinus et du cosinus : $\theta = \frac{2\pi}{3}$

La forme trigonométrique de $z$ est donc $\mathbf{[2\ ;\ \frac{2\pi}{3}]}$

**Exemple 2 :**

Soit $z$ un nombre complexe dont la forme trigonométrique est $[5\ ;\ \frac{\pi}{6}]$

$\begin{cases} a = \rho.\cos\theta = 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\frac{\sqrt{3}}{2} \\ b = \rho.\sin\theta = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \end{cases}$ en utilisant les valeurs remarquables du sinus et du cosinus de $\theta = \frac{\pi}{6}$

La forme algébrique de $z$ est donc $z = \mathbf{\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i}$

## IV. MODULE ET ARGUMENT D'UNE DIFFERENCE

### a. affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$

Soit A d'affixe $z_A$ et B d'affixe $z_B$ deux points distincts.

Alors $\boxed{\overrightarrow{AB} \text{ a pour affixe } z_B - z_A}$

(Se démontre en utilisant les affixes de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ puis $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$)

**Exemple :**

Soit A d'affixe $z_A = -2 + 2i$ et B d'affixe $z_B = 3 + 4i$

Alors l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est : $z_B - z_A = (3 + 4i) - (-2 + 2i) = 3 + 4i + 2 - 2i = 5 + 2i$

### b. Distance entre deux points

Soit A d'affixe $z_A$ et B d'affixe $z_B$ deux points distincts.

Alors $\boxed{\mathbf{AB} = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|}$

**Exemple :**

La distance AB de l'exemple précédent est : $|z_B - z_A| = |5 + 2i| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$

**c. Angle d'un vecteur avec $\vec{u}$**

Soit A d'affixe $z_A$ et B d'affixe $z_B$ deux points distincts.

Alors l'angle du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du vecteur unité $\vec{u}$ est : $\boxed{(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)}$

**Exemple :**

Soit A d'affixe $z_A = 2 + 5i$ et B d'affixe $z_B = 3 + 4i$

L'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est : $z_B - z_A = (3 + 4i) - (2 + 5i) = 3 + 4i - 2 - 5i = 1 - i$

$|z_B - z_A| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ donc } \theta = (\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{AB}) = -\dfrac{\pi}{4}$$