PROGRAMMES	COMMENTAIRES
Vecteurs : somme et produit par un nombre réel.	L'extension à l'espace des propriétés des vecteurs du plan se fera de façon intuitive. L'étude des barycentres n'est pas un objectif du programme.
Norme d'un vecteur, vecteurs orthogonaux. Bases orthonormales; repères orthonormaux.	
Expression analytique du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale.	On admettra l'extension à l'espace du produit scalaire et de ses propriétés. En liaison avec l'enseignement de la mécanique, dans la série STI, on sera amené à définir le produit vectoriel et à donner ses propriétés élémentaires mais aucune connaissance n'est exigible des élèves à ce sujet en mathématiques.
TP : Exemples simples de recherche et de représentation (en perspective ou en vraie grandeur) de sections planes (sections de prismes et de pyramides par des plans parallèles au plan de base ; méridiennes et parallèles de surfaces de révolution...).	Cette étude n'est au programme que des spécialités « génie mécanique », « génie civil », « génie énergétique », « génie des matériaux ». Comme dans les classes antérieures, pour l'ensemble des activités sur les configurations de l'espace, les élèves doivent être entraînés à l'emploi fréquent de croquis perspectifs avec ponctuation. On s'assurera qu'ils ont une bonne pratique des règles permettant la réalisation de tels croquis, mais tout exposé sur la perspective cavalière est exclu.

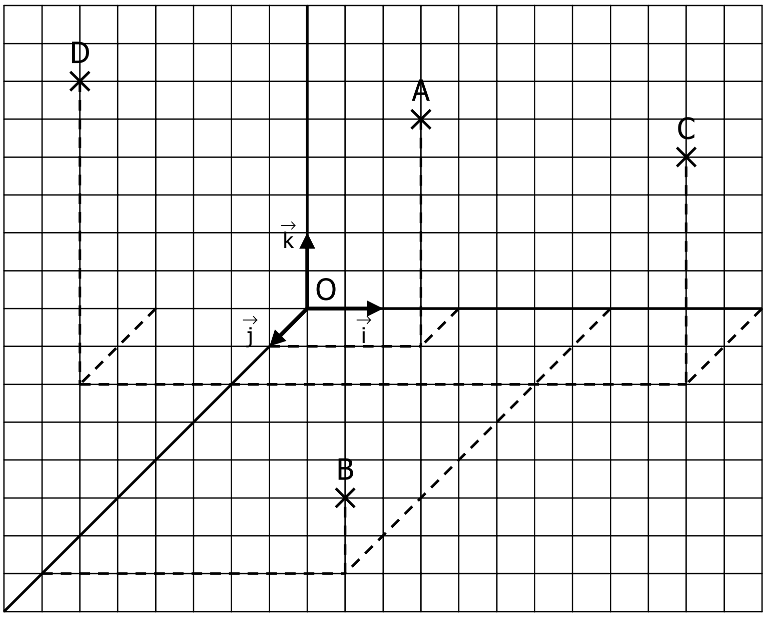
I. COORDONNEES DANS L'ESPACE

a. Coordonnées

Dans tout ce chapitre, l'espace est muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, où $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormale, c'est-à-dire que les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux.

Dire que le point A a pour coordonnées $(x ; y ; z)$ revient à dire que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

x est l'abscisse
y est l'ordonnée
z est la côte



Exemple :

Dans ce repère, on a les points :

A(1 ; 2 ; 3) B(7 ; 4 ; 1)

C(2 ; 6 ; 3) D(2 ; -2 ; 4)

b. Coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$

Soit $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et $B(x_B ; y_B ; z_B)$ deux points distincts, alors $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}}$

Exemple :

Avec A(1 ; 2 ; 3) et B(7 ; 4 ; 1), alors on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 7-1 \\ 4-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

c. Coordonnées du milieu de [AB]

Soit A(x_A ; y_A ; z_A) et B(x_B ; y_B ; z_B) deux points distincts, alors si I est le milieu de [AB] :

$$\boxed{I\left(\frac{x_B+x_A}{2},\frac{y_B+y_A}{2},\frac{z_B+z_A}{2}\right)}$$

Exemple :

Avec A(1 ; 2 ; 3) et B(7 ; 4 ; 1), alors on a $I\left(\frac{1+7}{2},\frac{2+4}{2},\frac{3+1}{2}\right)$, donc I(4 ; 3 ; 2)

II. VECTEURS DE L'ESPACE

Toutes les propriétés du plan (égalité de deux vecteurs, somme, opposé, multiplication par un réel) sont toujours valables dans l'espace.

a. Norme d'un vecteur

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un vecteur dans une base orthonormée. Alors : $\boxed{\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Exemple :

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix}$, alors $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{1^2+(-4)^2+2^2} = \sqrt{1+16+4} = \sqrt{21}$

b. Vecteurs colinéaires

Il n'existe pas de critère simple pour montrer que deux vecteurs sont colinéaires. Pour montrer la colinéarité, il faudra donc montrer que les coordonnées des deux vecteurs sont proportionnelles.

Exemple :

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-9\\3\\-6\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ? $\frac{6}{-9}=\frac{-2}{3}=\frac{4}{-6}$ → Oui, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

III. PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

a. Calcul à partir des coordonnées

Dans un repère orthonormal, soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls.

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'}$$

b. Vecteurs orthogonaux

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul, c'est-à-dire :

$$\boxed{\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\perp\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} \Leftrightarrow xx'+yy'+zz'=0}$$

Exemple :

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-4\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\7\\6\end{pmatrix}$ sont-ils orthogonaux ?

$2\times5+(-4)\times7+3\times6 = 10-28+18 = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

IV. PRODUIT VECTORIEL

a. Orientation de l'espace

On considère un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) de l'espace. Un « bonhomme » se place de la façon suivante:

- Les pieds en O
- Le corps suivant $\vec{k}$

S'il a « le bras droit suivant $\vec{i}$ et le bras gauche suivant $\vec{j}$ » le repère est **direct**.

S'il a « le bras droit suivant $\vec{j}$ et le bras gauche suivant $\vec{i}$ » le repère est **indirect**.

b. Produit vectoriel

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, dans un repère orthonormé **direct**.

On définit le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (et l'on note $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ou $\vec{u} \times \vec{v}$) de la façon suivante :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- Sinon, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est LE vecteur :
  - orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$
  - tel que ($\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u} \wedge \vec{v}$) est une base **directe** de l'espace.
  - $\left\| \vec{u} \wedge \vec{v} \right\| = \left\| \vec{u} \right\| \times \left\| \vec{v} \right\| \times |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$
  -

Remarques (différences entre produit scalaire et produit vectoriel):

→ Le produit **scalaire** est un **nombre** / Le produit **vectoriel** est un **vecteur**

→ Le produit **scalaire** est nul si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** / Le produit **vectoriel** est nul si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires**

c. Propriétés du produit vectoriel

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs, et k un nombre réel.

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- $\vec{u} \wedge (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \wedge \vec{v} = k(\vec{u} \wedge \vec{v})$
- $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$ (distributivité)

d. Calcul à partir des coordonnées

Dans un repère orthonormé **direct**, soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls.

Alors $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} yz' - y'z \\ xz' - x'z \\ xy' - x'y \end{pmatrix}$

Exemple :

$\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ → $\vec{u} \wedge \vec{v}\begin{pmatrix} 2 \times 2 - (-3) \times 0 \\ 0 \times 2 - (-3) \times (-3) \\ 0 \times 0 - 2 \times (-3) \end{pmatrix}$ d'où $\vec{u} \wedge \vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$