PROGRAMMES	COMMENTAIRES
Entretien du calcul vectoriel en liaison avec les disciplines industrielles et la physique.	La notion de barycentre pourra être abordée lors du traitement d'exemples.
Produit scalaire ; expressions du produit scalaire : $2\vec{u}.\vec{v} = \Vert\vec{u}+\vec{v}\Vert^2 - \Vert\vec{u}\Vert^2 - \Vert\vec{v}\Vert^2$ $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$ $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$ $\vec{u}.\vec{v} = \Vert\vec{u}\Vert\times\Vert\vec{v}\Vert\times\cos\theta$ Propriétés du produit scalaire : symétrie, linéarité. La projection orthogonale d'un vecteur $\vec{v}$ sur un axe Δ muni d'un vecteur unitaire $\vec{u}$ est $(\vec{u}.\vec{v})\vec{u}$. En particulier, les coordonnées x et y dans une base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j})$ sont x = $\vec{i}.\vec{v}$ et y = $\vec{j}.\vec{v}$	Le texte ci-contre suggère une démarche pour l'introduction du produit scalaire : on s'appuie sur la caractérisation (vue en seconde) de l'orthogonalité de deux vecteurs par $\Vert\vec{u}+\vec{v}\Vert^2=\Vert\vec{u}\Vert^2+\Vert\vec{v}\Vert^2$; ou encore par $xx' + yy' = 0$, ce qui amène aux deux premières expressions du produit scalaire indiquées ci-contre. Le professeur peut adopter un autre choix. Quel que soit ce choix, les quatre expressions doivent être mises en valeur et exploitées sur quelques exemples simples. La notion de forme bilinéaire symétrique est hors programme.
Caractérisation d'une droite par $\vec{k}.\overrightarrow{AM} = 0$	Les élèves doivent savoir déterminer un vecteur normal à une droite donnée par une équation.
Équation d'un cercle de centre et de rayon donnés : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.	La détermination du centre et du rayon d'un cercle donné par son équation cartésienne développée n'est pas exigible des élèves.
Formules d'addition pour les fonctions cosinus et sinus; formules de duplication.	Les formules de conversion de produit en somme et de somme en produit ne sont pas au programme ; il en est de même de la linéarisation des puissances autres que $\cos^2 a$ et $\sin^2 a$
TP : Exemples de calculs de distances, d'angles, d'aires et de volumes, dans des configurations usuelles du plan et de l'espace.	Pour les polygones réguliers, on se limitera à des cas simples tels que : triangle et hexagone, carré et octogone. Toute technicité particulière doit être évitée dans l'étude des triangles. Dans les spécialités « génie mécanique », « génie civil », « génie énergétique », « génie des matériaux » on pourra être amené à utiliser les formules suivantes : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$ $S = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$ $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}$ $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C} = \pi$

I. RAPPELS

a. Coordonnées

Dans tout ce chapitre, le plan est muni d'un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ où base $(\vec{i}, \vec{j})$ est orthonormale.

Soit $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points distincts. Alors :

→ le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées : $\boxed{\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}}$

→ le milieu I de [AB] a pour coordonnées : $\boxed{\left(\frac{x_B + x_A}{2} , \frac{y_B + y_A}{2}\right)}$

→ la distance entre A et B vaut : $\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$

b. Equation d'une droite

Toute droite (d) non parallèle à l'axe des ordonnées admet une **équation réduite** sous la forme $y = mx + p$
Cela signifie que tout point M(x ; y) doit avoir ses coordonnées qui vérifient l'équation pour appartenir à cette droite.
m est appelé le coefficient directeur de (d)
p est appelé l'ordonnée à l'origine de (d)

Tout vecteur qui a la même direction que (d) est appelé un **vecteur directeur**.

En particulier, le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d).

II. VECTEURS DU PLAN

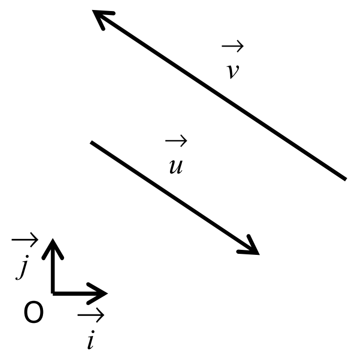
a. Norme d'un vecteur

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur. On appelle norme de $\vec{u}$ (notée $\|\vec{u}\|$) sa longueur. Et on a :

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

b. Vecteurs colinéaires

On dit que deux vecteurs sont colinéaires lorsqu'ils ont la même direction.



PROPRIETE :

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles c'est-à-dire si :

$\boxed{xy' - x'y = 0}$ ← **Critère de colinéarité de deux vecteurs.**

Exemple :

$\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

$2 \times (-3) - (-6) \times (-1) = -6 + 6 = 0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

c. Vecteurs orthogonaux

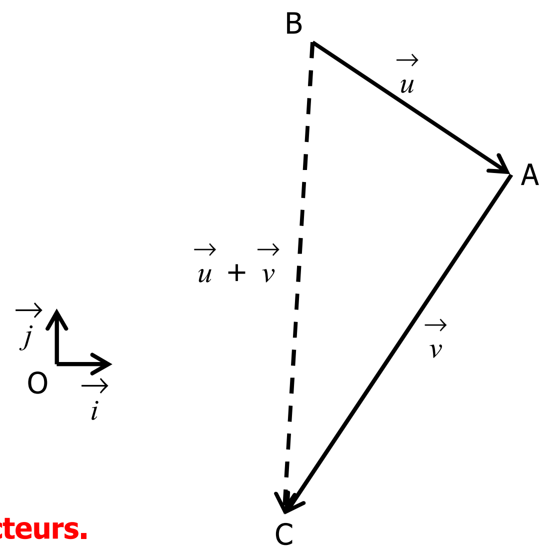
Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux revient à dire que le triangle ABC est rectangle en A

C'est-à-dire la conjecture de Pythagore : $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Et donc :

$$\boxed{\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2}$$



$\Leftrightarrow \quad (\sqrt{x^2 + y^2})^2 + (\sqrt{x'^2 + y'^2})^2 = (\sqrt{(x + x')^2 + (y + y')^2})^2$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2$

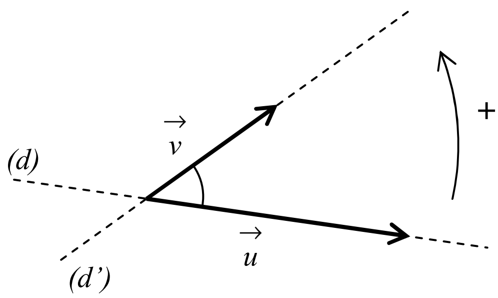
$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 = x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2\,yy' + y'^2$

$\Leftrightarrow \quad 0 = 2xx' + 2yy'$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{xx' + yy' = 0}$ ← **Critère d'orthogonalité de deux vecteurs.**

d. Angle de deux vecteurs

On appelle angle des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ l'angle **orienté** formé par deux droites (d) et (d') de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On le note $(\vec{u}, \vec{v})$ ou $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.



Remarque : $(\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u})$

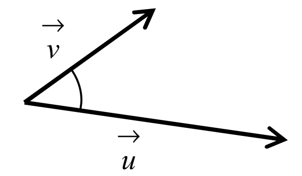
III. PRODUIT SCALAIRE

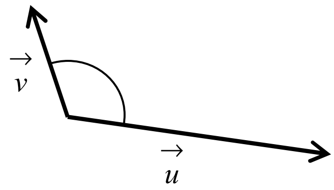
a. Définition

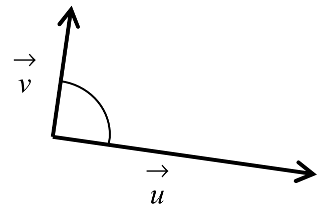
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On appelle produit sclalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le nombre :

$$\boxed{\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})}$$

Exemples :







$\|\vec{u}\| = 4 \,;\, \|\vec{v}\| = 3$ et $(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\pi}{4}$

$\vec{u}\,.\,\vec{v} = 4 \times 3 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$

$\|\vec{u}\| = 5 \,;\, \|\vec{v}\| = 2$ et $(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{2\pi}{3}$

$\vec{u}\,.\,\vec{v} = 5 \times 2 \times \dfrac{-1}{2} = -5$

$\|\vec{u}\| = 7 \,;\, \|\vec{v}\| = 3$ et $(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\pi}{2}$

$\vec{u}\,.\,\vec{v} = 7 \times 3 \times 0 = -0$

b. Propriétés

On admet les propriétés suivantes, où $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs et k un nombre réel :

→ La **symétrie** du produit scalaire : $\boxed{\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}}$

→ La **linéarité** du produit scalaire : $\boxed{\vec{u}\,.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{u}\,.\vec{w}}$ et $\boxed{k(\vec{u}\,.\,\vec{v}) = (k\vec{u}).\,\vec{v} = \vec{u}\,.k(\vec{v})}$

c. Orthogonalité

Propriété :

Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$

Conséquence :

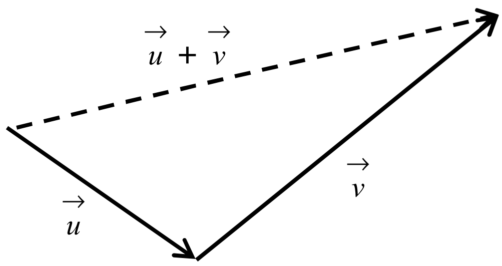
Puisque pour tout vecteur $\vec{u}$, on a $\vec{u}\,.\,\vec{0} = 0$, alors le vecteur nul est orthogonal à tous les autres vecteurs.

III. CALCUL D'UN PRODUIT SCALAIRE

a. A partir des normes des vecteurs

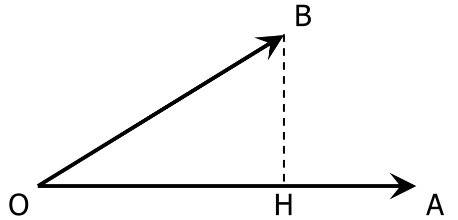
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

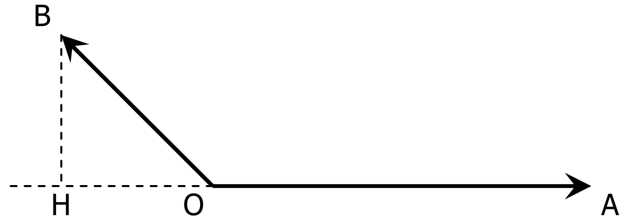
$$\boxed{2.\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2}$$



b. A partir d'une projection orthogonale

Soit $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ deux vecteurs non colinéaires, et H le projeté orthogonal de B sur (OA)





$$\boxed{\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OH} = \begin{cases} OA \times OH \text{ si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de même sens} \\ -\,OA \times OH \text{ si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}}$$

c. A partir des coordonnées dans une base orthonormale

Pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on a : $\boxed{\vec{u}\,.\,\vec{v} = xx' + yy'}$

IV. UTILISATION DU PRODUIT SCALAIRE

a. Formules d'addition et duplication des fonctions cosinus et sinus

On considère les points A et B sur le cercle trigonométrique.

On pose $\widehat{IOA} = a$ et $\widehat{IOB} = b$ donc $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix}$ et l'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$ vaut $b - a$

Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{OB}\,.\,\overrightarrow{OA}$ de deux façons différentes :

→ La définition : $\overrightarrow{OB}\,.\,\overrightarrow{OA} = ||\overrightarrow{OB}|| \times ||\overrightarrow{OA}|| \times \cos(b-a) = 1 \times 1 \times \cos(b-a) = \cos(b-a)$

→ Les coordonnées : $\overrightarrow{OB}\,.\,\overrightarrow{OA} = \cos a\,.\,\cos b + \sin a\,.\,\sin b$

Conclusion : $\cos(b-a) = \cos a\,.\,\cos b + \sin a\,.\,\sin b$

Formules d'addition : pour tous réels a et b on a :

$$\cos(a+b) = \cos a\,.\,\cos b - \sin a\,.\,\sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a\,.\,\cos b + \sin a\,.\,\sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a\,.\,\cos b + \cos a\,.\,\sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a\,.\,\cos b - \cos a\,.\,\sin b$$

Dans le cas où a = b, on en déduit les…

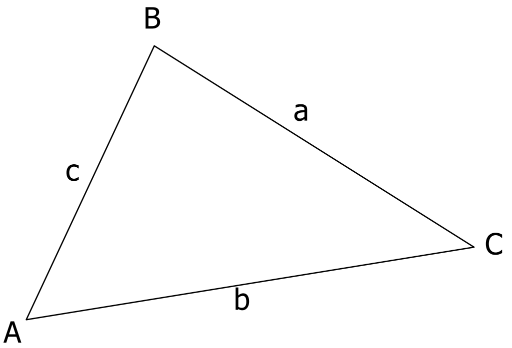
Formules de duplication : pour tout réel :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$
$$\sin(2a) = 2\cos a\,.\,\sin a$$

b. Relations d'Al Kashi (ou « Loi des cosinus »)

Il doit son nom français au mathématicien perse (Ghiyath al-Kashi) qui a vécu entre 1380 et 1429. L'appellation *loi des cosinus* est apparue plus tard, aussi en Europe.

On considère le triangle ABC ci-contre :



On pose : AB = c
AC = b
BC = a

Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ de deux façons différentes :

→ La définition : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = AB \times BC \times \cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})^* = c \times a \times (-\cos\widehat{B}) = -ac\cos\widehat{B}$

(*) $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}) = \pi - \widehat{B}$ donc $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}) = -\cos\widehat{B}$

→ La formule "triangulaire" : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(b^2 - c^2 - a^2)$

On a donc : $\frac{1}{2}(b^2 - c^2 - a^2) = -ac\cos\widehat{B} \Leftrightarrow b^2 - c^2 - a^2 = -2ac\cos\widehat{B}$ d'où :

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}}$$

De la même façon on pourrait montrer les formules :

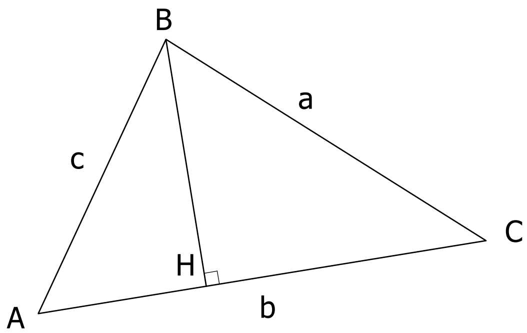
$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}}$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}}$$

Ces formule permettent de calculer la longueur d'un côté en connaissant les longueurs des deux autres côtés et l'angle qu'ils forment.

c. Formule « des 3 sinus »

On considère le triangle ABC ci-contre :



On appelle BH la hauteur issue de B.

On pose : AB = c
AC = b
BC = a

D'après les formules de trigonométrie : $\sin\widehat{A} = \frac{BH}{AB}$ d'où $BH = AB\sin\widehat{A} = c\sin\widehat{A}$

L'aire du triangle est : $S = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{AC \times BH}{2} = \frac{b \times c\sin\widehat{A}}{2}$

On a donc montré que $S = \frac{bc\sin\widehat{A}}{2}$. On aurait pu montrer de la même façon $S = \frac{ac\sin\widehat{B}}{2}$ ou $S = \frac{ab\sin\widehat{C}}{2}$

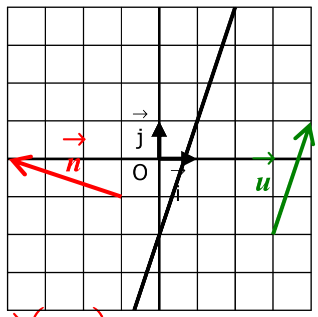
Donc $S = \frac{bc\sin\widehat{A}}{2} = \frac{ac\sin\widehat{B}}{2} = \frac{ab\sin\widehat{C}}{2}$ et en multipliant cette égalité par $\frac{2}{abc}$ on obtient la « formule des 3 sinus » :

$$\boxed{\frac{2S}{abc} = \frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c}}$$

V. CARACTERISATION D'UNE DROITE

a. Vecteur normal à une droite

On appelle vecteur normal à une droite (d) de vecteur directeur $\vec{u}$ tout vecteur $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{u}$.



Exemple : Soit (d) la droite d'équation : $y = 3x - 2$

Un *vecteur directeur* à cette droite est le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

Un *vecteur normal* à cette droite est le donc le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$.

En effet : $\vec{u}.\vec{n} = 1 \times (-3) + 3 \times 1 = -3 + 3 = 0$

Propriété :

Si (d) la droite d'équation : $y = mx + p$, *alors un vecteur normal* à (d) est $\boldsymbol{\vec{n}\begin{pmatrix}-m\\1\end{pmatrix}}$.

b. Equation cartésienne d'une droite

On appelle équation cartésienne d'une droite toute équation sous la forme ax + by + c = 0, où a, b et c sont des coefficients réels.

Exemple : Soit (d) la droite d'équation réduite : $y = 3x - 2$
L'équation cartésienne de (d) est $-3x + y + 2 = 0$

c. Détermination de l'équation cartésienne d'une droite

Soit A un point et $\vec{n}$ un vecteur non nul.

Alors l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ est LA droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Exemple : On donne A (2 ; -1) et $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$, et on veut déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Soit M$(x ; y)$, donc $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y+1\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0 &\Leftrightarrow 4(x-2) + (-3)(y+1) = 0\\ &\Leftrightarrow 4x - 8 - 3y - 3 = 0\\ &\Leftrightarrow \boxed{\mathbf{4x - 3y - 11 = 0}}\end{aligned}$$

VI. EQUATION D'UN CERCLE

Définition : On appelle cercle de centre I et de rayon r l'ensemble des points M situés à une distance r de I

Soit I$(a ; b)$ le centre du cercle, et M$(x ; y)$ un point de ce cercle.

M appartient au cercle $\Leftrightarrow$ IM $= r \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{IM}\right\| = r \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \Leftrightarrow \mathbf{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$

Propriété :

L'équation d'un cercle de centre I$(a ; b)$ et de rayon r est $\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$

Exemple : L'équation du cercle de centre I(2 ; -1) et de rayon 5 est $\mathbf{(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25}$

→*Question :* le point A(5 ; 3) appartient-il au cercle ?
→*Réponse :* $(5-2)^2 + (3+1)^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 =$ **25** donc A appartient au cercle.